Huiswerkopgaven I

♠ **Huiswerk I-1.** Veronderstel dat de verzameling R met bewerkingen $+$ en $\times$ gegeven is.

(i) Laat zien dat als $R, +$ aan [L2] voldoet, het element 0 uniek is.

(ii) Laat zien dat als $R, +, \times$ een ring met 1 vormt (die niet noodzakelijk commutatief is), er geldt dat $0 \times r = r \times 0 = 0$, dat $-1 \times r = r \times -1 = -r$, en dat $r \times (-s) = (-r) \times s = -(r \times s)$ voor alle $r, s \in R$. Houd in elke stap bij welke eigenschap je gebruikt!

♠ **Huiswerk I-2.** Laat V een verzameling zijn met daarop een bewerking die we met $\cdot$ aangeven. Veronderstel dat deze bewerking associatief is, dus

$$\forall x, y, z \in V: \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

(i) Laat zien dat dan ook geldt:

$$\forall x, y, z, a \in V: \quad ((x \cdot y) \cdot z) \cdot a = (x \cdot y) \cdot (z \cdot a).$$

(ii) Bewijs dat als $\cdot$ ook commutatief is, er geldt:

$$\forall x, y, z \in V: \quad (x \cdot y) \cdot z = y \cdot (z \cdot x).$$

Het is eenvoudig (maar vervelend) om te laten zien dat matrixvermenigvuldiging van 2×2 matrices van rationale getallen een associatieve bewerking is; dus $\times$ is een associatieve bewerking op $\mathrm{M}_2(\mathbb{Q})$.

(iii) Laat door een tegenvoorbeeld zien dat $\times$ geen commutatieve bewerking is op $\mathrm{M}_2(\mathbb{Q})$.

(iv) Laat zien dat voor een verzameling met een associatieve bewerking *niet* altijd geldt:

$$\forall x, y, z \in V: \quad (x \cdot y) \cdot z = y \cdot (z \cdot x).$$

♠ **Huiswerk I-3.** Laat E een eindige, niet-lege verzameling zijn. Laat $P(E)$ de *machtsverzameling* van E zijn, dat is de verzameling waarvan de elementen de *deelverzamelingen* van E zijn.

(i) Voor elk tweetal deelverzamelingen A, B van E definiëren we

$$A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B);$$

dus $A + B$ bestaat uit elementen van E die wel in de vereniging maar niet in de doorsnede van A en B zitten. Laat zien dat dit een bewerking op $P(E)$ geeft.

(ii) Laat zien dat deze bewerking $+$ op $P(E)$ commutatief is.

(iii) Laat zien dat er een element 0 van $P(E)$ bestaat zodat $A + 0 = A$.

(iv) Laat zien dat bij elke A in $P(E)$ een A^{-1} bestaat zodat $A + A^{-1} = 0$, met de 0 uit (iii).

(v) Maak twee plaatjes van drie elkaar snijdende cirkels die drie deelverzamelingen A, B, C van E voorstellen. Elementen van A liggen dan binnen de eerste cirkel, van $A \cap B$ in het stuk waar A en B overlappen, enz. Geef door arcering in het eerste plaatje aan waar $(A+B)+C$ zit, en in het tweede waar $A+(B+C)$. Is $+$ associatief op $P(E)$?