Huiswerkopgaven II

Een *relatie* $\sim$ op een verzameling V wordt gedefinieerd door een deelverzameling R van $V \times V$, bestaande uit de elementen $(v, w) \in V \times V$ waarvoor $v \sim w$; we zeggen dan dat v in relatie $\sim$ tot w staat. Voor alle paren die niet in R zitten geldt $v \not\sim w$. Een voorbeeld is de relatie $\leq$ op $\mathbb{Z}$.

Een *equivalentierelatie* op een verzameling V is een relatie $\sim$ op V zodanig dat voor alle $u, v, w \in V$ geldt: $u \sim u$ (reflexiviteit), en $v \sim u$ als $u \sim v$ (symmetrie), en $u \sim w$ als $u \sim v$ èn $v \sim w$ (transitiviteit). Een equivalentierelatie splitst V op in (disjuncte) equivalentieklassen.

♠ **Huiswerk II-1.** De elementen van $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ zijn de restklassen $\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{m-1}$.

(i) Maak een opteltabel en een vermenigvuldigtabel voor $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. (De rijen en kolommen van de tabel corresponderen met de verschillende elementen van $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, en op plaats i, j staat de som, resp. het product van $\bar{i}$ en $\bar{j}$ in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.)

(ii) Geef aan hoe je uit deze tabellen ziet of een element eenheid is en of een element nuldeler is.

(iii) Gebruik (ii) om deze vraag te beantwoorden: welke van de vier ringen uit (i) vormen een lichaam?

(iv) Laat zien dat de relatie $x \sim y \iff x \equiv y \bmod m$ (dus $\bar{x} = \bar{y}$) een equivalentierelatie op $\mathbb{Z}$ is.

♠ **Huiswerk II-2.** In de volgende onderdelen is $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de ring van restklassen modulo 2, die dus alleen uit $\bar{0}, \bar{1}$ bestaat.

(i) Hoeveel verschillende elementen heeft $\mathrm{M}_2(R)$, de ring van 2×2 matrices met coëfficiënten uit R?

(ii) Wat is het element 0 in $\mathrm{M}_2(R)$ en wat is het element 1 (uit de definitie van lichaam, ring enz.)?

(iii) Vind een element ongelijk aan 0 in $\mathrm{M}_2(R)$ dat geen eenheid is.

(iv) Vind een element ongelijk aan 1 in $\mathrm{M}_2(R)$ dat een eenheid is.

(v) Vind twee elementen r, s in $\mathrm{M}_2(R)$ met $r \times s = 0$ maar $s \times r \neq 0$.

♠ **Huiswerk II-3.** Laat $S[x]$ de polynoomring zijn met $S = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$: de elementen zijn dus polynomen met coëfficiënten in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Vind een polynoom f van graad 2 en een polynoom g van graad 3 in $S[x]$ met $f \times g = 0$, en vind ook twee polynomen $p, q \in S[x]$ van graad minstens 1 met $p \times q = x + 2 \in S[x]$.

♠ **Huiswerk II-4.** [**Breukenlichaam**].
Laat R met $+$ en $\times$ een ring (commutatief met 1) zonder nuldelers zijn. We definiëren een equivalentierelatie $\sim$ op de verzameling $V = \{(r, s) : r, s \in R, s \neq 0\}$ als volgt:

$$(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2) \iff r_1 \times s_2 = r_2 \times s_1.$$

We geven de equivalentieklasse van elementen uit V waar (t, n) in zit meestal aan met $\frac{t}{n}$. Op deze klassen kunnen we optelling en vermenigvuldiging definiëren door

$$\frac{t_1}{n_1} + \frac{t_2}{n_2} = \frac{t_1 \times n_2 + t_2 \times n_1}{n_1 \times n_2}, \quad \text{en} \quad \frac{t_1}{n_1} \times \frac{t_2}{n_2} = \frac{t_1 \times t_2}{n_1 \times n_2}.$$

(i) Wanneer $R = \mathbb{Z}$, waaruit bestaat dan de verzameling elementen van V die equivalent zijn met $(0, 1)$, en waaruit de equivalentieklassen van $(1, 1)$ en van $(3, -1)$?

(ii) Laat zien dat voor $R = \mathbb{Z}$ bij elke equivalentieklasse een tegengestelde bestaat, en, als het niet de klasse $\frac{0}{1}$ is, ook een inverse.

(iii) Als nu $R = \mathbb{Q}[x]$, beantwoord dan dezelfde vragen uit (i) en (ii).

De constructie in deze opgave maakt het *breukenlichaam* bij een domein.