

1. In $V = \mathbf{Q}^3$ is van de lineaire transformatie f gegeven dat geldt: $f(c_1) = -3c_1 + c_2$, $f(c_2) = 4c_1 - 2c_2 + 4c_3$ en $f(2c_1 + c_3) = 3c_3$.
- (i) Laat zien dat $\{c_1, c_2, c_3\}$ een onafhankelijk stelsel vormt.
 - (ii) Bepaal de kern van f .
 - (iii) Bepaal de matrix ${}^{\mathcal{C}}M_f^{\mathcal{C}}$ ten opzichte van de basis $\mathcal{C} = [c_1, c_2, c_3]$.
 - (iv) Bepaal de matrix ${}^{\mathcal{B}}M_f^{\mathcal{B}}$ van f ten opzichte van de basis \mathcal{B} , als

$${}^{\mathcal{C}}M_{\text{id}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

de matrix is die een vector gegeven in coördinaten ten opzichte van de basis \mathcal{B} uitdrukt in coördinaten ten opzichte van de basis \mathcal{C} .

2. Deze opgave gaat over foutenverbeterende codes over het lichaam \mathbf{F}_2 van twee elementen (die we met 0 en 1 aangeven). Het inproduct is altijd het standaardinproduct van vectoren over \mathbf{F}_2 .
- (i) Laat \mathcal{C} de code zijn met generatormatrix

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geef alle codewoorden van \mathcal{C} (die door rijen opgespannen worden).

- (ii) Wat is de minimumafstand van de code \mathcal{C} ?
- (iii) Laat zien dat de code niet 1-foutverbeterend is (bijvoorbeeld door te laten zien dat 1 fout in een codewoord niet altijd op een unieke manier te herstellen is).
- (iv) De *duale* \mathcal{E}^\perp van een code \mathcal{E} in \mathbf{F}_2^n bestaat uit de vectoren uit \mathbf{F}_2^n die inproduct 0 met alle codewoorden hebben. Laat zien dat \mathcal{E}^\perp weer een code is.
- (v) Bepaal de duale \mathcal{C}^\perp van de code uit onderdeel (i).
- (vi) Een code \mathcal{E} heet *zelfduaal* wanneer $\mathcal{E}^\perp = \mathcal{E}$. Laat zien dat de code \mathcal{D} met generatormatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zelfduaal is.

- (vii) Bewijs dat in een iedere zelfduale code elk codewoord even gewicht heeft.

3. Geef voor elk van de volgende beweringen een bewijs of een tegenvoorbeeld.
- (i) In een commutatieve ring is een product van een nuldeeler en een eenheid weer nuldeeler.
 - (ii) Voor elk stelsel van 3 lineaire vergelijkingen in de 3 onbekenden x_1, x_2, x_3 kun je met behulp van de regel van Cramer een oplossing vinden.
 - (iii) De ring $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})[x]^{(2)}$ van polynomen van graad kleiner dan 2 met coëfficiënten uit $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ vormt een lichaam van 9 elementen.
 - (iv) Wanneer de lineaire transformatie f van een eindig-dimensionale vectorruimte V ten opzichte van een zekere basis door een inverteerbare matrix wordt gegeven, dan wordt deze transformatie ten opzichte van elke basis door een inverteerbare matrix gegeven.
4. Voor deze opgave is het nuttig je te herinneren dat de som $V + W$ van twee lineaire deelruimten V, W van een vectorruimte een directe som $V \oplus W$ is wanneer elke vector in de som op een *unieke* manier te schrijven is als $v + w$ met $v \in V$ en $w \in W$. Een afbeelding $T : U \rightarrow U$ van een vectorruimte U heet een *projectie op de lineaire deelruimte* V van U als geldt dat $U = V \oplus W$, voor zekere lineaire deelruimte W van U en $T(u) = v$ als $u = v + w$ met $v \in V$ en $w \in W$.
- (i) Laat zien dat de afbeelding π die aan een vector $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ de vector $(x_1, 0, 0) \in \mathbf{R}^3$ toevoegt een projectie is.
 - (ii) Bewijs dat een projectie een lineaire afbeelding is.
 - (iii) Als T een projectie op de lineaire deelruimte V van U is, dan bestaat V precies uit die vectoren $v \in U$ waarvoor geldt dat $T(v) = v$. Bewijs dit.
 - (iv) Zij $U = K[x]$ de vectorruimte van coëfficiënten van polynomen over een lichaam K , met optelling als bewerking. Laat zien dat voor een vast polynoom $f \in K[x]$ de verzameling $V_f = \{f \cdot u : u \in U\}$ een lineaire deelruimte is van U .
 - (v) Laat $f = x^2 + 1$ en $g = x$ polynomen uit $U = \mathbf{Q}[x]$ zijn. Laat zien dat je 1 kunt schrijven als lineaire combinatie $1 = s \cdot f + t \cdot g$ voor $s, t \in K[x]$, en dat daarom $U = V_f + V_g$; laat ook zien dat niet geldt dat $U = V_f \oplus V_g$.