

1. In $V = \mathbf{Q}^3$ zijn twee bases gegeven, namelijk \mathcal{B} bestaande uit b_1, b_2, b_3 en \mathcal{C} bestaande uit c_1, c_2, c_3 . Verder is f een lineaire transformatie van V met $f(b_1 + b_2 + b_3) = c_1$, $f(b_1 - 3b_3) = c_2$, en $f(b_1 - b_2 - b_3) = 2c_1 - 2c_3$.
 - (i) Bepaal de matrix ${}^{\mathcal{C}}M_f^{\mathcal{B}}$ die de coördinaten ten opzichte van \mathcal{C} van het beeld $f(v)$ van een vector v bepaalt, als v in coördinaten ten opzichte van de basis \mathcal{B} is gegeven.
 - (ii) Nu is bovendien gegeven dat $c_1 = 4b_1 + 2b_2$, en $c_2 = 4b_2 - 7b_3$, en $c_3 = 2b_1 - 2b_3$. Bepaal ${}^{\mathcal{B}}M_f^{\mathcal{B}}$.
 - (iii) Bepaal ook ${}^{\mathcal{C}}M_f^{\mathcal{C}}$.

2. De Reed-Mullercodes C_n (voor $n = 0, 1, 2, \dots$) vormen een familie van foutenverbeterende codes over het lichaam \mathbf{F}_2 van twee elementen. De code C_n wordt gedefinieerd als deelruimte van de vectorruimte van dimensie 2^n over \mathbf{F}_2 door een basis te geven, en wel:
 - voor C_0 de basis bestaande uit (1) in \mathbf{F}_2^1 ;
 - voor C_1 de basis bestaande uit (1, 1) en (0, 1) in \mathbf{F}_2^2 ;
 - voor C_2 basis bestaande uit (1, 1, 1, 1) en (0, 1, 0, 1) en (0, 0, 1, 1) in \mathbf{F}_2^4 ;
 - algemeen, voor C_n plak je van elke vector u uit de basis voor C_{n-1} twee copieën achter elkaar tot $u \oplus u$, en voeg je nog de vector $\vec{0} \oplus \vec{1}$ toe, bestaande uit 2^{n-1} nullen gevolgd door 2^{n-1} enen.
 - (i) Geef alle codewoorden in C_0 , alle codewoorden in C_1 en alle codewoorden in C_2 .
 - (ii) Geef de vier basisvectoren voor C_3 .
 - (iii) Bewijs met behulp van volledige inductie dat er in C_n precies 2^{n+1} vectoren (uit $\mathbf{F}_2^{2^n}$) zitten.
 - (iv) Bepaal de *gewichtverdeling* van de codewoorden uit C_n , dat wil zeggen: geef alle Hamminggewichten die onder de codewoorden voorkomen, en geef aan hoe veel codewoorden met dat gewicht er zijn.
 - (v) Bewijs dat 2^{n-1} de minimumafstand tussen codewoorden van C_n is.
 - (vi) Wat is het aantal fouten e_3 dat je kunt verbeteren in C_3 ?
 - (vii) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat je niet altijd $e_3 + 1$ fouten kunt verbeteren in C_3 .

3. Geef voor elk van de volgende beweringen een bewijs of toon (bijvoorbeeld met een tegenvoorbeeld) de onjuistheid ervan aan.
- (i) Laat A een vierkante $n \times n$ matrix met coëfficiënten over een lichaam L zijn, en $b \in L^n$ een kolomvector. Dan geldt: als A inverteerbaar is, dan is er altijd een kolomvector $x \in L^n$ met $A \cdot x = b$.
 - (ii) Uit $138 \cdot 1197 - 165 \cdot 1001 = 21$ volgt dat de grootste gemene deler van 1197 en 1001 gelijk is aan 21.
 - (iii) De verzameling $M_{2,2}(\mathbf{F}_2)$ van 2×2 matrices over het lichaam van 2 elementen vormt zelf een lichaam van 2^4 elementen.
 - (iv) Voor een lineaire transformatie ϕ van een eindig-dimensionale vectorruimte V geldt: ϕ is surjectief dan en slechts dan als de kern van ϕ gelijk is aan $\{0\}$.
4. De deelverzameling $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ van de complexe getallen bestaat uit de elementen van de vorm $a + b\sqrt{-3}$ met $a, b \in \mathbf{Q}$.
- (i) De verzameling $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ vormt een deellichaam van \mathbf{C} onder de gebruikelijke optelling en vermenigvuldiging van complexe getallen. Laat zien dat inderdaad elk niet-nul element van $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ een inverse in deze verzameling heeft.
 - (ii) De verzameling $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ is ook op te vatten als \mathbf{Q} -vectorruimte. Geef de dimensie en een basis hiervoor.
 - (iii) Noem het element $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ van $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ nu ζ . Laat zien dat de drie elementen $1, \zeta, \zeta^2$ afhankelijk zijn als we ze opvatten als vectoren in de \mathbf{Q} -vectorruimte $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$. Schrijf ook ζ^3 op de basis uit (ii).
 - (iv) Gebruik het vorige onderdeel om een polynoom $g \in \mathbf{Q}[X]$ van graad 2 te vinden waarvan ζ een nulpunt is.
 - (v) Laat ook zien dat ζ een nulpunt is van $X^3 - 1$; wat is het verband tussen dit polynoom en $g(X)$?
 - (vi) We kunnen de vermenigvuldiging met ζ opvatten als een lineaire transformatie van de \mathbf{Q} -vectorruimte $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$; geef de matrix Z van die transformatie ten opzichte van de basis uit (ii).
 - (vii) Wat is Z^3 ?
 - (viii) Je kunt de lineaire afbeelding die bij Z hoort ook op het hele complexe vlak loslaten; geef een meetkundige interpretatie van die lineaire afbeelding (wanneer je het complexe vlak met het platte vlak \mathbf{R}^2 identificeert).