Antwoorden I

♠ **Uitwerking I-1.**

(i) Als 0 en $0'$ allebei aan [L2] voldoen geldt: $0 = 0 + 0'$ (omdat 0 nul is) en $0' = 0 + 0'$ (omdat $0'$ nul is), dus $0 = 0 + 0' = 0'$.

(ii) Voor alle r geldt:

$$r + (0 \times r) = (1 \times r) + (0 \times r) = (1 + 0) \times r = 1 \times r = r$$

dus moet $0 \times r = 0$ (tel er links en rechts $-r$ bij op). Net zo voor $r \times 0$. Bovendien is dan:

$$r + (-1 \times r) = 1 \times r + (-1 \times r) = (1 + -1) \times r = 0 \times r = 0$$

dus $(-1 \times r)$ is de tegengestelde van r. Net zo voor $r \times (-s)$. [In feite gelden al deze eigenschappen al voor een niet noodzakelijk commutatieve ring met 1.]

♠ **Uitwerking I-2.**

(i) $((x \cdot y) \cdot z) \cdot a = (x \cdot (y \cdot z)) \cdot a = x \cdot ((y \cdot z) \cdot a) = x \cdot (y \cdot (z \cdot a)) = (x \cdot y) \cdot (z \cdot a)$.

(ii) $(x \cdot y) \cdot z = (y \cdot x) \cdot z = y \cdot (x \cdot z) = y \cdot (z \cdot x)$

(iii) Bijvoorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(iv) Bijvoorbeeld: gebruik je x, y uit voorgaande en z de eenheidsmatrix! Werkt voor alle x, y waarvoor vermenigvuldiging niet commuteert.

♠ **Uitwerking I-3.** Laat $P(E)$ de *machtsverzameling* van E zijn, dat is de verzameling waarvan de elementen de *deelverzamelingen* van E zijn.

(i) Het is (voor elke A en B) weer een deelverzameling van E, namelijk

$$\{x : x \in E \mid x \in A \text{ or } x \in B \text{ en niet } (x \in A \text{ and } x \in B)\}.$$

(ii) Volgt uit commutativiteit van $\cup$ en $\cap$.

(iii) Neem de lege verzameling: $A + \emptyset = A$.

(iv) Neem A zelf.

(v) Ja! $A + B + C$ is dus welgedefinieerd, en bestaat uit alle elementen van $A \cup B \cup C$ die niet in de doorsnede van precies twee van de drie verzamelingen A, B, C zitten (maar wel de elementen die in de doorsnede van alle drie zitten):

$$A + B + C = (A \cup B \cup C) \setminus ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup B \cap C)) \cup (A \cap B \cap C).$$

Maak plaatje!

♠ **Uitwerking I-4.** Maak de tabellen, en label alle rijen en kolommen met de restklassen. L2 en L6 lees je af door te laten zien dat de rijen en kolommen bij $\bar{0}$ en $\bar{1}$ in de twee tabellen overeenkomen met de labels; L3 en L7 door te laten zien dat in elke rij en kolom in de tabellen een $\bar{0}$ resp. een $\bar{1}$ voorkomt; L4 en L8 door te laten zien dat de tabellen symmetrisch om de hoofddiagonaal zijn.