
Antwoorden II

♠ Uitwerking II-1.

- (i) Als U leeg is, zijn de eisen in (ii) en (iii) leeg en dus altijd vervuld.
- (ii) Als $0 \in U$ zit is U duidelijk niet leeg; omgekeerd, als U niet leeg is, zit er een vector u in, en op grond van (iii) dan ook $-u$ en op grond van (ii) ook $0 = u + (-u)$. Dus (i) en (i)' zijn equivalent.
- (iii) Neem (bijvoorbeeld) in $\mathbb{R}^2$ alle vectoren met als eindpunt (a, b) met $a, b \in \mathbb{Z}$.
- (iv) Neem (bijvoorbeeld) de vereniging van de x -as en de y -as in $\mathbb{R}^2$.

♠ Uitwerking II-2.

- (i) Zeg v_j is de nulvector; neem dan $\lambda_j = 1$ en $\lambda_i = 0$ voor $i \neq j$; dan is $\sum_i \lambda_i \cdot v_i = 0$ maar niet alle $\lambda_i = 0$, dus het stelsel is afhankelijk.
- (ii) Als $v_1 \neq 0$ dan is $\lambda_1 \cdot v_1 = 0$ alleen wanneer $\lambda_1 = 0$ (want anders is $v_1 = \lambda_1^{-1} \lambda_1 \cdot v_1 = \lambda_1^{-1} \cdot 0 = 0$, tegenspraak!), dus v_1 is een onafhankelijk stelsel. Omgekeerd, als v_1 onafhankelijk is kan v_1 geen nul zijn op grond van het vorige onderdeel.
- (iii) Als R afhankelijk is, zijn er λ_1 en λ_2 zodat $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 = 0$ en niet beide λ 's nul. Als één van de twee λ 's nul is, dan is de andere v de nulvector, en dat is een scalair veelvoud van elke andere vector. Neem dus aan dat beide λ 's niet nul zijn, dan krijgen we $v_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2$ en we zijn klaar.
- (iv) Als $v_1 = \mu \cdot v_2$, dan is R afhankelijk omdat $1 \cdot v_1 - \mu \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = 0$; hetzelfde natuurlijk met andere indices dan 1 en 2. Maar, bijvoorbeeld in $\mathbb{R}^2$ zijn de vectoren met eindpunten $(1, 0)$, $(0, 1)$ en $(1, 1)$ afhankelijk zonder dat er één een veelvoud van de ander is.

♠ Uitwerking II-3.

- (i) Controleer de drie voorwaarden: $(0, 0, 0, 0, 0)$ voldoet want $0 - 0 - 0 = 0$, als v en w voldoen dan is $v_2 + w_2 - (v_3 + w_3) - (v_4 + w_4) = v_2 - v_3 - v_4 + w_2 - w_3 - w_4 = 0 + 0 = 0$, dus $v + w$ voldoet, en $\lambda \cdot v_2 - \lambda \cdot v_3 - \lambda \cdot v_4 = \lambda \cdot (v_2 - v_3 - v_4) = \lambda \cdot 0 = 0$, dus $\lambda \cdot v$ voldoet ook.
- (ii) Alle oplossingen zijn van de vorm $(w_1, w_3 + w_4, w_3, w_4, w_5)$ waarin w_1, w_3, w_4, w_5 vrij te kiezen zijn — dus 4-dimensionaal. $(w_1, w_3 + w_4, w_3, w_4, w_5) = w_1 \cdot (1, 0, 0, 0, 0) + w_3 \cdot (0, 1, 1, 0, 0) + w_4 \cdot (0, 1, 0, 1, 0) + w_5 \cdot (0, 0, 0, 0, 1)$, dus die 4 vectoren vormen een basis.
- (iii) Net zo: $x = (0, 0, 0)$ voldoet, en sommen en veelvouden van oplossingen ook weer, dus een lineaire deelruimte.
- (iv) Intuïtief: U bestaat uit vectoren in $\mathbb{R}^3$ die aan twee lineaire condities voldoen, en er blijft dus 1 vrije dimensie over (hiervoor moet je wel opmerken dat de twee vergelijkingen onafhankelijk zijn: de rijvectoren van de coëfficiëntenmatrix zijn onafhankelijk). Netter: we bepalen de kern van een lineaire afbeelding, en de som van de dimensie van de kern en de dimensie van het beeld moet 3 zijn; het beeld is de rang van de matrix en die is 2, dus de dimensie van de kern is 1. Maar dit gebruikt een stelling die we pas tegenkomen in het volgende hoofdstuk. Omdat we toch een basis moeten bepalen is het hier simpelweg het aantal basiselementen; standaardoplosses (vegen bvb) geeft $x_3 = 0$ en $x_1 = 2x_2$, dus de kern wordt opgespannen door $(2, 1, 0)$.

♠ Uitwerking II-4.

- (i) De nulmatrix is diagonaalmatrix, sommen en veelvouden ook weer.
- (ii) Elke diagonaalmatrix is unieke lineaire combinatie van de matrices S_i (voor $1 \leq i \leq n$) die overal nullen hebben behalve op positie (i, i) want daar staat een 1. Dus (zie Opmerking 2.11) vormen de S_i een basis van n elementen.
- (iii) Een vectorruimte van dimensie n over een lichaam met 3 elementen heeft 3^n elementen; op elk van de n diagonaalposities zijn 3 mogelijkheden.

♠ **Uitwerking II-5.**

- (i) Omdat W_1 en W_2 lineaire deelruimten zijn, zit 0 in beide, dus in de doorsnede. Als u, v allebei in de doorsnede zitten, zit $u + v$ in W_1 (want beide zitten daarin en het is lineaire deelruimte) en evenzo in W_2 dus $u + v$ zit in beide, en daarom in de doorsnede. Net zo voor $\lambda \cdot u$ als u in beide zit.
- (ii) Neem bijvoorbeeld in $\mathbb{R}^2$ de vereniging van twee niet samnevallende lijnen door de oorsprong. Beide lijnen zijn lineaire deelruimte, maar de som van een niet-nul vector uit de ene en een niet-nul vector uit de ander zit niet meer in de vereniging — expliciet: neem de x -as opgespannen door $(1, 0)$ en de y -as opgespannen door $(0, 1)$ dan zit $(1, 1)$ niet in de vereniging maar is wel $(1, 0) + (0, 1)$.
- (iii) Als $W_1 \cup W_2$ een lineaire deelruimte van V is, moet $w_1 + w_2$ voor $w_1 \in W_1$ en $w_2 \in W_2$ weer in $W_1 \cup W_2$ zitten, dus in W_1 of in W_2 . Veronderstel nu dat W_1 geen deelverzameling van W_2 is, en kies een vector w_1 uit W_1 die niet in W_2 zit. Voor elke vector w_2 uit W_2 moet nu gelden dat $w_1 + w_2 = w \in W_1$, want de som moet in $W_1 \cup W_2$ zitten, en als $w_1 + w_2 = w \in W_2$ dan is $w_1 = w - w_2$ de som van twee vectoren w en $-w_2$ uit W_2 , en dus zelf in W_2 , in tegenspraak met de keuze van w_1 . Maar dan hebben we dat voor elke $w_2 \in W_2$ geldt dat $w_1 + w_2 = w \in W_1$, dus $w_2 = w - w_1 \in W_1$: dus elke w_2 zit in W_1 , d.w.z. $W_2 \subset W_1$.