Antwoorden IV

♠ **Uitwerking IV-1.**

(i) Kies voor $\mathcal{C}$ bijvoorbeeld de basis met coordinaatvectoren (ten opzichte van $\mathcal{E}$)

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

zodat de draaiing c_1 invariant laat, en de andere twee vectoren roteert over een hoek ϕ omdat ze loodrecht op de draaiingsas staan. Omdat c_2 en c_3 ook loodrecht op elkaar staan en lengte 1 hebben, krijgen we in het door die twee vectoren opgespannen vlak de gewone draaiingsmatrix, dus

$${}^{\mathcal{C}}M_{\psi}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

(ii) De matrix ${}^{\mathcal{E}}M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{C}}$ is eenvoudig omdat we $\mathcal{C}$ al hebben uitgedrukt op de basis $\mathcal{E}$:

$${}^{\mathcal{E}}M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

de andere is hiervan eenvoudigweg de inverse (bijvoorbeeld door vegen):

$${}^{\mathcal{C}}M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

(iii) Nu is ${}^{\mathcal{E}}M_{\psi}^{\mathcal{E}} = {}^{\mathcal{E}}M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{C}} \cdot {}^{\mathcal{C}}M_{\psi}^{\mathcal{C}} \cdot {}^{\mathcal{C}}M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{E}}$ en dat is

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

dus (maar dat is niet zo heel interessant!)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\phi & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos\phi + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\phi & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos\phi - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\phi \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos\phi - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\phi & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\phi & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos\phi + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\phi \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos\phi + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\phi & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos\phi - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\phi & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\phi \end{pmatrix}$$

voor ψ ten opzichte van de oorspronkelijke basis $\mathcal{E}$.

♠ **Uitwerking IV-2.**

(i) Als je ziet dat $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan volgt natuurlijk uit lineariteit direct dat $\phi\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\phi\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 7\phi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3(1-x^2) - 7(2-3x+x^2) = -11+21x-10x^2$. Als je dat niet ziet, los je eerst het algemene probleem op, bijvoorbeeld: omdat $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ is $\phi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1-x^2) - 2(2-3x+x^2) = -3+6x-3x^2$, maar dan is $\phi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \phi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \phi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2-3x+x^2-(-3+6x-3x^2) = 5-9x+4x^2$, en dus is $\phi\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a(5-9x+4x^2) + b(-3+6x-3x^2)$, hetgeen voor $a=-1$ en $b=2$ weer $-11+21x-10x^2$ geeft.

(ii) Kies als basis voor $\mathbb{Q}^2$ bijvoorbeeld $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ en van $\mathbb{Q}[x]^{(2)}$ bijvoorbeeld $1, x, x^2$; dan is de gevraagde matrix voor ϕ:

$$\begin{pmatrix}5 & -3\\ -9 & 6\\ 4 & -3\end{pmatrix}$$

ten opzichte hiervan (neem a, b gelijk aan $1, 0$ en aan $0, 1$ in het vorige onderdeel van de uitwerking).

(iii) Omdat de kolommen van bovenstaande matrix onafhankelijk zijn, vormen deze twee beeldvectoren samen een basis voor het beeld. Dus zijn $5 - 9x + 4x^2$ en $-3 + 6x - 3x^2$ een basis voor het beeld. De kern bestaat alleen uit de nulvector (gebruik de dimensiestelling, of merk op dat de kolommen van de matrix onafhankelijk zijn), dus de gevraagde basis is leeg.

(iv) Om een vector uit $\mathbb{Q}^2$ met beeld $1 - x$ te vinden moeten we laten zien dat $1 - x$ in het beeld zit, dat wil zeggen, bijvoorbeeld het stelsel

$$\begin{pmatrix}5 & -3\\ -9 & 6\\ 4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

oplossen. Maar uit de eerste twee vergelijkingen blijkt dat $x_1 = 1$, en dan $x_2 = \frac{4}{3}$ Die oplossing voldoet ook in de derde vergelijking, dus klaar. Maar de vector $\begin{pmatrix}-6\\10\\-6\end{pmatrix}$ is onafhankelijk van de kolommen van de matrix (zoals uit vegen blijkt), dus het stelsel

$$\begin{pmatrix}5 & -3\\ -9 & 6\\ 4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\10\\-6\end{pmatrix}$$

heeft geen oplossingen!

♠ Uitwerking IV-3.

(i) c_1 is niet lineair: bijvoorbeeld is $c_1(\mathrm{i}) = -\mathrm{i} \neq \mathrm{i}c_1(1)$. Maar c_2 wel: $c_2((a, b)) = (a, -b)$ dus

$$c_2((a, b)+(c, d)) = c_2((a+c, b+d)) = (a+c, -b-d) = (a, -b)+(c, -d) = c_2(a, b)+c_2(c, d),$$

en

$$c_2(\lambda \cdot (a, b)) = c_2((\lambda \cdot a, \lambda \cdot b)) = (\lambda \cdot a, -\lambda \cdot b) = \lambda \cdot (a, -b) = \lambda \cdot c_2(a, b).$$

(ii) Volgt direct uit lineariteit: laten $v_1, \dots, v_n$ lineair onafhankelijke vectoren zijn, en veronderstel dat $\lambda_1 \cdot f(v_1) + \cdots + \lambda_n \cdot f(v_n) = 0$; dat impliceert vanwege lineariteit van f dat $f(\lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n) = 0$, maar omdat f injectief is bestaat de kern alleen uit de nulvector, dus $\lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n = 0$ en daarom moet $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Maar dan waren de vectoren $f(v_1), \dots, f(v_n)$ dus kennelijk ook onafhankelijk.

(iii) Ja, lineariteit is duidelijk (door het verifieren van de twee eigenschappen). En de afbeelding is zowel injectief (omdat twee polynomen met alleen even machten alleen maar gelijk zijn als al hun coëfficiënten het zijn) als surjectief (want je kunt elk polynoom met alleen even machten zo maken als beeld).

♠ Uitwerking IV-4. [Differentiatie]

(i) $D(f + g) = f' + g'$ volgens de somregel en $D(\lambda f) = \lambda f'$ volgens de productregel voor afgeleiden, dus is D lineair.

(ii) Als beeld krijg je alle polynomen van graad ten hoogste $n-1$, en de kern bestaat uit alle constante polynomen. Kies als basis $1, x, \cdots, x^n$, dan is de matrix

$$\mathcal{M}_D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en daaruit zie je ook direct het beeld en de kern nogmaals.

(iii) Natuurlijk weet je dat op $\mathbb{R}[x]$ alleen het 0-polynoom zijn eigen afgeleide is, maar je ziet het hier ook, omdat, als we de graad van het gezochte polynoom op n zetten, we moeten oplossen, met $f = c_0 + c_1x + \cdots c_nx^n$:

$$\mathcal{M}_D \cdot f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

en dan vinden we $c_1 = c_0$, $2c_2 = c_1$, enzovoorts tot $(n-1)c_n = c_{n-1}$ en $0 = c_n$. Maar van achteren naar voren lezend worden dan alle c_i gelijk aan 0, dus $f = 0$.

(iv) Nu lossen we een oneindig stelsel vergelijkingen op, waarvan de j-de vergelijking luidt: $j \cdot c_j = c_{j-1}$. Dat heeft niet-nul oplossingen, bijvoorbeeld met $c_0 = 1$ krijgen we $c_1 = 1$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = \frac{1}{3\cdot 2}$ enzovoorts, met $c_j = \frac{1}{j!}$ voor $j > 0$. Dus

$$F = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!}x^j = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots$$

is zo'n oplossing. Merk op dat dit de formele versie van de 'Taylorontwikkeling' van de exponentiële functie e^x is.