
Antwoorden V

♠ **Uitwerking V-1.** Laat E_i de matrix zijn met op i -de positie een 1, wanneer we eerst langs de eerste rij tellen, dan de tweede, enz. Dus bijvoorbeeld $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Dan lees je af:

$$\varepsilon_{M_{\text{id}}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dus ${}^{\mathcal{B}}M_{\text{id}}^{\mathcal{E}}$ is de inverse

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

en dat is ook eenvoudig direct af te lezen.

(ii) Hier is ${}^{\mathcal{B}}M_{\text{id}}^{\mathcal{C}}$ vrij eenvoudig direct af te lezen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De inverse ${}^{\mathcal{C}}M_{\text{id}}^{\mathcal{B}}$ is:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

♠ **Uitwerking V-2.** Eén manier is om de elementaire matrices op te schrijven die je gebruikt om de gegeven A te vegen tot I_3 ; bijvoorbeeld, in de notatie van Def 5.1:

$$E_{1,3}(-2) \cdot E_{2,3}(4) \cdot D_3\left(\frac{1}{11}\right) \cdot E_{3,2}(-3) \cdot P_{2,3} \cdot P_{1,2} \cdot E_{3,2}(-2) \cdot E_{1,2}(-1) \cdot A = I_3,$$

dus A is het product van de inversen in omgekeerde volgorde:

$$A = E_{1,2}(1) \cdot E_{3,2}(2) \cdot P_{1,2} \cdot P_{2,3} \cdot E_{3,2}(3) \cdot D_3(11) \cdot E_{2,3}(-4) \cdot E_{1,3}(2).$$

♠ **Uitwerking V-3.** We schrijven steeds de matrix ten opzichte van de standaardbasis $1, x, x^2$ voor V (en de standaardbasis voor $\mathbb{Q}^3$), met de inverse waar mogelijk:

(i) $T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ met inverse $T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(ii) $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (niet inverteerbaar)

(iii) $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ met inverse $T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$

(iv) $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ met inverse $T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Dat laatste betekent dus bijvoorbeeld dat $T^{-1}(a, b, c)^T = b + (-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c) \cdot x + (\frac{1}{2}a - b + \frac{1}{2}c) \cdot x^2$.

♠ **Uitwerking V-4.** Een stelsel kan alleen meer dan één oplossing hebben als de determinant van de coëfficiëntenmatrix 0 is; die determinant is hier $\alpha^3 - 36\alpha = \alpha \cdot (\alpha^2 - 36) = \alpha \cdot (\alpha - 6) \cdot (\alpha + 6)$.

Als $\alpha = 0$ dan kan aan de tweede vergelijking niet voldaan worden, en als $\alpha = 6$ dan zijn de eerste en derde vergelijking strijdig met elkaar; in beide gevallen zijn er geen oplossingen.

Maar als $\alpha = -6$ dan zijn de eerste en derde vergelijking equivalent, en we vinden de oplossingen $x_1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}x_3$, $x_2 = -\frac{5}{6}$ en x_3 willekeurig uit $\mathbb{Q}$ te kiezen: de algemene oplossing is dan

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{5}{6} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

(maar dat werd niet gevraagd). Het antwoord is: alleen voor $\alpha = -6$ zijn er meerdere oplossingen.

♠ **Uitwerking V-5.** Reken (door vegen bijvoorbeeld!) de determinant uit:

$$\begin{aligned} \det W_p &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= -3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -3. \end{aligned}$$

Dus W_p is inverteerbaar voor elke p behalve $p = 3$.

De inverse kan als gewoonlijk met vegen in de geaugmenteerde matrix worden bepaald, nu rekenend modulo 5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

en rechts staat nu inderdaad de inverse!

♠ **Uitwerking V-6.** Laat B uit $m \cdot n$ gegeven coëfficiënten bestaan, in n onafhankelijke kolommen ter lengte m . Dan moet $n \leq m$ want anders kunnen de m rijen geen rang n hebben. Laat A uit $n \cdot m$ onbekende coëfficiënten bestaan, dan geeft het uitvermenigvuldigen van $A \cdot B = I_n$ precies n^2 vergelijkingen in de $n \cdot m$ onbekenden. Bekijk eens preciezer de i -de rij A_i van A ; de enige vergelijkingen waar de daarin voorkomende variabelen aan moeten voldoen, is het stelsel

$$A_i \cdot B = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

met rechts alleen een 1 op de i -de positie. Om een gewoon stelsel lineair te zien, transponeren we deze vergelijking tot

$$B^T \cdot A_i^T = e_i^T,$$

met rechts de i -de eenheids-kolomvector, en links de getransponeerde B^T , een $n \times m$ matrix van rang n , en de i -de rij van A nu als kolomvector. Dit geeft precies n vergelijkingen in de m variabelen uit A_i , en we zagen dat $n \leq m$. We moeten nog aantonen dat dit stelsel een oplossing heeft.

Omdat $\text{rang } B^T = \text{rang } B = n$, zijn er n onafhankelijke kolommen in B^T , en die kolommen hebben lengte n : dus het opspansel van de kolommen van B^T is de hele ruimte L^n , als L het lichaam is waarover we werken, en in het bijzonder is de vector e_i^T een lineaire combinatie van de kolommen, met andere woorden: het stelsel $B^T \cdot A_i^T = e_i^T$ heeft een oplossing! (Vergelijk Stelling 5.14.)

Dit geldt voor elke i : we kunnen de vergelijkingen voor alle variabelen uit A oplossen.

Merk nog het speciale geval $m = n$ op: in dat geval is B en dus B^T inverteerbaar, en zijn alle stelsels als boven uniek oplosbaar: we vinden voor A precies de uniek bepaalde inverse van B .