Antwoorden VI

♠ **Uitwerking VI-1.** Wanneer je dit algebraïsch wilt oplossen ben je op zoek naar een matrix over een lichaam L waarvan het karakteristieke polynoom geen nulpunten in het lichaam heeft — dus bijvoorbeeld

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

met karakteristiek polynoom $x^2 + 1$ over het lichaam $\mathbb{Q}$. Meetkundig (dus over $\mathbb{R}$) zoek je een lineaire afbeelding die geen vector in een veelvoud van zichzelf overvoert, dus bijvoorbeeld een rotatie over een hoek ϕ met $0 < \phi < \pi$. Het voorbeeld hierboven is het geval $\phi = \pi/2$.

♠ **Uitwerking VI-2.**

(i) Het karakteristieke polynoom voor A is

$$p_A = \det \begin{pmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ -2 & 5 & x-4 \end{pmatrix} = x(x(x-4)+5) - 2 \cdot 1 = x^3 - 4x^2 + 5x - 2.$$

(ii) De eigenwaarden van A over $\mathbb{Q}$ zijn de rationale nulpunten van p_A. Om die te vinden probeer je eerst een paar kleine gehele getallen: $p_A(0) = -2, p_A(1) = 0$ — en dus is p_A deelbaar door $x-1$. Inderdaad $p_A = (x-1)(x^2-3x+2) = (x-1)(x-2)(x-1)$. De eigenwaarden zijn 1 en 2.

(iii) We bepalen E_1 en E_2; nu is E_1 gelijk aan

$$\operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

en die wordt duidelijk opgespannen door $(1,1,1)^\mathsf{T}$. En E_2 is

$$\operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

dus opgespannen door $(1,2,4)^\mathsf{T}$.

(iv) Het karakteristieke polynoom is nu simpelweg dat over $\mathbb{Q}$ gereduceerd modulo 2 (reken uit, of gebruik dat modulo 2 nemen een homorfisme is), dus $p_{\overline{A}} = x^3 + x = x(x^2+1) = x(x+1)(x+1)$ over $\mathbb{F}_2$. De eigenwaarden zijn 0 en 1, met

$$E_0 = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

opgespannen door $(1,0,0)^\mathsf{T}$, en

$$E_1 = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

opgespannen door $(1,1,1)^\mathsf{T}$.

Merk op dat je alle antwoorden bij (iv) krijgt door die bij (iii) modulo 2 te nemen!

♠ **Uitwerking VI-3.**

(i) Kies $1, x, x^2$ als basis $\mathcal{B}$; nu is $\phi(1) = 1$ en $\phi(x) = 2x + 1$ en $\phi(x^2) = 3x^2 + 2x$, dus

$$M_\phi^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(ii) Het karakteristieke polynoom van ϕ is

$$p_\phi = \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-2 & -2 \\ 0 & 0 & x-3 \end{pmatrix} = (x-1)(x-2)(x-3).$$

(iii) De eigenwaarden van ϕ zijn $1, 2, 3$.

(iv) Weer is

$$E_1 = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

opgespannen door $(1,0,0)^\mathsf{T}$ corresponderend met het polynoom 1;

$$E_2 = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

opgespannen door $(1,1,0)^\mathsf{T}$ corresponderend met het polynoom $1 + x$;

$$E_3 = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

opgespannen door $(1,2,1)^\mathsf{T}$ corresponderend met het polynoom $1 + 2x + x^2$.

(v) Als we de basis $\mathcal{C}$ laten bestaan uit de drie gevonden eigenvectoren, dan is $M_\phi^{\mathcal{C}}$ een diagonaalmatrix (met de eigenwaarden op de diagonaal; neem voor C dus ${}^{\mathcal{B}}M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{C}}$, dat wil zeggen

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inderdaad,

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

en

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

♠ **Uitwerking VI-4.** Dit is lastig zonder meer algebra gehad te hebben; neem genoegen met de antwoorden (irreducibele factoren) zonder bewijs.

(i) $x^4 - 2 = (x - \sqrt[4]{2})(x + \sqrt[4]{2})(x - \sqrt{-1}\sqrt[4]{2})(x + \sqrt{-1}\sqrt[4]{2})$ over $\mathbb{C}$, waar $\sqrt[4]{2}$ het positieve reële getal is waarvan de vierde macht 2 is. In het complexe vlak liggen deze 4 punten op de 4 assen op gelijke afstand van de oorsprong. Nu zijn $(x - \sqrt[4]{2})$ en $(x + \sqrt[4]{2})$ reëel, en ook het product van de andere twee $(x - \sqrt{-1}\sqrt[4]{2})(x + \sqrt{-1}\sqrt[4]{2}) = x^2 + \sqrt{2}$, dus over de reële getallen: $x^4 - 2 = (x - \sqrt[4]{2})(x + \sqrt[4]{2})(x^2 + \sqrt{2})$. Merk op dat het product van de eerste twee $x^2 - \sqrt{2}$ is. Over $\mathbb{Q}$ is het polynoom irreducibel. (Het is lastig te bewijzen, en het antwoord geven is genoeg. Bijvoorbeeld: geen van de mogelijke producten van de lineaire factoren over $\mathbb{C}$ geeft een polynoom over $\mathbb{Q}$; of omdat er zeker geen nulpunt in $\mathbb{Q}$ is (want $\sqrt{2}$ is al irrationaal) en ook het product van twee kwadratische factoren kan niet: probeer maar $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 - 2$ op te lossen!)

(ii) $x^8-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ over $\mathbb{Q}$, en ook over $\mathbb{R}$, maar over $\mathbb{C}$ krijgen we 8 lineaire factoren, corresponderend met de nulpunten $1, -1, \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$ en de vier getallen waarvan de vierde macht -1 is, namelijk $\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm \sqrt{-1})$. In het complexe vlak zijn dit de 8 hoekpunten van de regelmatige achthoek op de eenheidscirkel. De vergelijking is namelijk makkelijker op te lossen in poolcoördinaten, alle punten in het complexe vlak met lengte 1 en argument $k \cdot \frac{2\pi}{8}$. $\sqrt{-1}$ bestaat n over $\mathbb{R}$ en over $\mathbb{C}$;

(iii) $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ over het lichaam met 5 elementen want proberen van de 5 restklassen laat zien dat het kwadratische stuk geen nulpunten heeft.

(iv) $x^5-x=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ over $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ want alle restklassen zijn nulpunt!

♠ **Uitwerking VI-5.**

(i) Schrijf $f=a_mx^m+\cdots+a_0$ en $g=b_nx^n+\cdots+b_0$, dan is $f\cdot g=a_mb_nx^{n+m}+\cdots+a_0b_0$ en dus is $\deg f\cdot g=n+m=\deg f+\deg g$. Dit is ook waar als $f=0$ of $g=0$ want dan zijn beide zijden $-\infty$.

(ii) $\deg(2x+1)\cdot(3x)=\deg(3x)=1<1+1=\deg(2x+1)+\deg(3x)$. In $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[x]$ geldt wel gelijkheid omdat $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ een lichaam is en er dus geen nuldelers zijn zodat het product van de kopcoëfficiënten a_m en b_n niet nul is als ze het beide zelf niet zijn.

(iii) Nee, want $\deg((x^2+1)+(-x^2))=0<\max(2,2)=\max(\deg(x^2+1),\deg(-x^2))$.

(iv) Er zijn in $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ vier nulpunten, namelijk de restklassen van $1,5,7,11$, voor het polynoom $x^2+\overline{11}\in(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})[x]$.

(v) Volgt uit het voorgaande: modulo 12 zijn $(x+1)(x+11)$ en $(x+5)(x+7)$ allebei x^2+11. Polynomen van graad 1 zijn altijd irreducibel.