
Antwoorden VII

♠ Uitwerking VII-1.

(i)

$$M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii)

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Tu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T^2u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T^3u = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3T^2u - 3Tu,$$

dus op T_u voldoet T aan $x^3 = 3x^2 - 3x$ (en geen lagere-graads vergelijking), zodat $p_{T_u} = x^3 - 3x^2 + 3x$.

(iii)

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Tu = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T^2u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T^3u = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3T^2u - 3Tu,$$

en we vinden hetzelfde karakteristiek polynoom $p_{T_u} = x^3 - 3x^2 + 3x$. Maar voor

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Tu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u$$

vinden we $p_{T_u} = x - 1$.

(iv) Omdat p_T deelbaar moet zijn door de gevonden polynomen $x^3 - 3x^2 + 3x = x \cdot (x^2 - 3x + 3)$ en $x - 1$, die geen gemeenschappelijke factor hebben, moet p_T deelbaar zijn door hun product, en omdat dit product $x \cdot (x - 1) \cdot (x^2 - 3x + 3)$ al van graad 4 (en monisch) is, moet p_T daaraan gelijk zijn.

(v) Zoals gewoonlijk is (ontwikkel naar eerste rij):

$$p_T = \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & x-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1)^4 + (x-1) = (x-1) \cdot x \cdot (x^2 - 3x + 3),$$

zoals verwacht.

(vi) Niet diagonaliseerbaar, omdat niet alle nulpunten in $\mathbb{Q}$ liggen. Merk op: over $\mathbb{C}$ zijn alle nulpunten verschillend en zou de transformatie wel diagonaliseerbaar zijn (maar dat werd niet gevraagd).

♠ Uitwerking VII-2.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & -6 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

- (i) Er is gegeven dat 2 en 4 de enige eigenwaarden van M zijn, om het ontbinden van het karakteristieke polynoom eenvoudiger te maken: we weten nu dat het van de vorm $p_M = (x-2)^i(x-4)^j$, met $i+j=4$ en $i, j \geq 1$, moet zijn. Je kunt nu op de gebruikelijke manier het karakteristieke polynoom bepalen en zo uitvinden wat i en j moeten zijn. Maar je kunt ook de determinant van M bepalen, want als we aan het eind $J = Q^{-1} \cdot M \cdot Q$ hebben bepaald weten we enerzijds dat $\det J = \det M$ en anderzijds dat op de diagonaal van J alle eigenwaarden met de juiste multipliciteiten staan! Berekening leert dat

$$\begin{aligned} \det M &= 2(2(1 \cdot 7 - 3 \cdot 3) - 6(1 \cdot 3 - 3 \cdot 3)) + \\ &\quad 2(-4(3 \cdot 7 - 3 \cdot 3) + 2(2 \cdot 7 - 3 \cdot 2) - 6(2 \cdot 3 - 3 \cdot 2)) + \\ &\quad -2(-4(1 \cdot 7 - 3 \cdot 3) - 6(2 \cdot 3 - 1 \cdot 2)) + \\ &\quad 2(-4(1 \cdot 3 - 3 \cdot 3) - 2(2 \cdot 3 - 1 \cdot 2)) = \\ &= 64 \end{aligned}$$

dus er moet op de diagonaal wel $2^2 \cdot 4^2$ staan: $i = j = 2$.

- (ii) $E_2 = \text{Ker}(2I - M)$ en $E_4 = \text{Ker}(4I - M)$, respectievelijk

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 6 & -3 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

In de eerste zien we de onafhankelijke eigenvectoren $(1, 1, 1, 1)^T$ en $(1, 0, -1, 1)^T$ (eventueel met enig vegen, de rang is 2), in de tweede $(0, 1, 1, 1)^T$ (de rang is 3). Dan weten we met (i) genoeg voor de Jordan vorm:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- (iii) De matrix Q is weer de basistransformatiematrix; we weten al de eerste 3 basisvectoren, want dat zijn de onafhankelijke eigenvectoren. We moeten nog op zoek naar een vector b_4 met de eigenschap dat $Mb_4 = 4b_4 + b_3$, dus $(M - 4I)b_4 = b_3$, waar $b_3 = (0, 1, 1, 1)^T$. Dit is simpelweg het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen, en een oplossing is $b_4 = (1, -1, -1, 0)^T$. Dus

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

♠ **Uitwerking VII-3.** Het karakteristiek polynoom van

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

is

$$p_M = \det \begin{pmatrix} x & 3 & 2 \\ 4 & x & 2 \\ 1 & 0 & x+2 \end{pmatrix} = x \cdot x \cdot (x+2) + 3(x+2) + (6+3x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$$

(steeds rekenend modulo 5), en door proberen zie je dat dit nulpunten $x = 2$ en $x = 3$ heeft. Nu is $x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x+2)(x^2+1) = (x+2)(x+2)(x+3)$ over het lichaam met 5 elementen. De eigenruimtes E_2 en E_3 zijn de kern van

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

respectievelijk, opgespannen door $(1, 2, 1)^\top$ en $(0, 1, 1)^\top$. Dan moet

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Misschien met de twee blokken omgewisseld.) Om de gegeneraliseerde eigenruimte bij 3 te bepalen kunnen we als voorheen een stelsel vergelijkingen oplossen, of kijken naar de kern van $(M - 3I)^2 = (M + 2I)^2$, dus van

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Een vector in de kern is bijvoorbeeld $v = (1, 0, 1)^\top$. Nu is het beeld van deze vector $Mv = (3, 4, 2)^\top = 3v - (0, 1, 1)$, zodat we $-v$ als tweede basisvector kunnen nemen, dus

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

En inderdaad, met

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

vinden we $Q^{-1} \cdot M \cdot Q = J$.

♠ Uitwerking VII-4.

- (i) $P \cdot \begin{pmatrix} 30000 \\ 30000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26000 \\ 34000 \end{pmatrix}$. Inderdaad: er blijven 25000 stadsbewoners in de stad en er komen 1000 plattelandsbewoners bij, etc.
- (ii) $P^2 \cdot \begin{pmatrix} 30000 \\ 30000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22800 \\ 37200 \end{pmatrix}$ en $P^{10} \cdot \begin{pmatrix} 30000 \\ 30000 \end{pmatrix}$.
- (iii) De eigenwaarden van P zijn de nulpunten van

$$\left(x - \frac{25}{30}\right) \cdot \left(x - \frac{29}{30}\right) - \frac{-5}{30} \cdot \frac{-1}{30} = x^2 - \frac{9}{5}x + \frac{4}{5} = \left(x - \frac{4}{5}\right) \cdot (x - 1)$$

dus $\frac{4}{5}$ en 1. De bijbehorende eigenvectoren zijn $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, dus

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (iv) Natuurlijk is $D^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \frac{4}{5}^k & 0 \\ 0 & 1^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dus

$$P^\infty = Q^{-1} D^\infty Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

- (v) $P^\infty \cdot \begin{pmatrix} 30000 \\ 30000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10000 \\ 50000 \end{pmatrix}$; de verhouding 1 : 5 is onafhankelijk van de oorspronkelijke verdeling!