

Hoofdstuk 2

Vectorruimten

Nu zijn we in staat definities en stellingen uit **Lineaire Algebra 1** en **2** te generaliseren.

Definitie 2.1 Zij L een lichaam. Een L -vectorruimte is een drietal $(V, +, \cdot)$, bestaande uit een niet-lege verzameling V , met daarop een bewerking $+$, en een afbeelding $\cdot$ die aan elk paar $(\lambda, v) \in L \times V$ een element $\lambda \cdot v$ in V toevoegt, die voldoen aan:

- [V1] de operatie $+$ op V is associatief: $(u + v) + w = u + (v + w)$, voor alle $u, v, w \in V$;
- [V2] er is een (nul)element $0 \in V$ zodanig dat $0 + v = v + 0 = v$ voor alle $v \in V$;
- [V3] bij elke $v \in V$ is er een *tegengestelde* $-v \in V$ zodanig dat $v + (-v) = (-v) + v = 0$;
- [V4] de operatie $+$ op V is commutatief: $v + w = w + v$ voor alle $v, w \in V$;
- [V5] $1 \cdot v = v$ voor alle $v \in V$;
- [V6] $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$ voor alle $\lambda \in L$ en $v, w \in V$;
- [V7] $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ voor alle $\lambda, \mu \in L$ en $v \in V$;
- [V8] $(\lambda \times \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$ voor alle $\lambda, \mu \in L$ en $v \in V$.

Opmerkingen 2.2 Vergeet niet dat de eis dat $+$ een bewerking is, oplegt dat

- [V0] $v_1 + v_2 \in V$ voor alle $v_1, v_2 \in V$.

Een afbeelding $\cdot : L \times V \rightarrow V$, voor een lichaam L en een verzameling V , die aan V[5 – 8] voldoet wordt een *scalaire vermenigvuldiging* genoemd. Kort samengevat kunnen we dan zeggen dat een L -vectorruimte niets anders is dan een additieve groep $(V, +)$ met daarop een scalaire vermenigvuldiging $\cdot$ gedefinieerd. De elementen van L heten *scalaires*, die van V *vectoren*. Merk op dat bij een vectorruimte dus een lichaam hoort waaruit de scalaires komen. In **Lineaire Algebra 1** werd onder vectorruimte het speciale geval van $\mathbb{R}$ -vectorruimte of *reële vectorruimte* verstaan. In dit hoofdstuk proberen we voor de duidelijkheid consequent $\cdot$ te schrijven voor de scalaire vermenigvuldiging, maar daarna wordt het snel λv in plaats van $\lambda \cdot v$.

Het is ook mogelijk een structuur analoog aan een vectorruimte maar dan algemener over een ring R te definiëren, een zogenaamd *R -moduul*.

Voorbeelden 2.3

- (i) Uit **Lineaire Algebra 1** ken je de ruimte $\mathbb{R}^n$ bestaande uit n -tallen reële getallen (geschreven als *rijvector* of *kolomvector*); de optelling is coördinaatsgewijs en vermenigvuldiging met een scalar gebeurt door alle coördinaten

met de scalar te vermenigvuldigen. Net zo is de verzameling van alle rijtjes van n elementen uit elk lichaam L een L -vectorruimte, die we met L^n aangeven (voor $n \geq 1$). Per definitie is $L^0 = \{0\}$.

- (ii) Ook de verzameling van *oneindige rijtjes* elementen $x_1, x_2, \dots$ van L is een L -vectorruimte onder coördinaatsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging als in het eindige geval; deze vectorruimte geven we aan met L^∞ .
- (iii) De verzameling van alle polynomen met coëfficiënten uit L vormt met optelling en scalaire vermenigvuldiging $\lambda \cdot (a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0) = (\lambda a_m) x^m + \dots + (\lambda a_1) x + \lambda a_0$ een L -vectorruimte, voor elk lichaam L .
- (iv) Laat $M_{m \times n}(L)$ voor een lichaam L en positieve gehele getallen m, n de verzameling van $m \times n$ matrices met coëfficiënten in L zijn. Dan is $M_{m \times n}(L)$ een L -vectorruimte (onder de gebruikelijke optelling) als we de scalaire vermenigvuldiging $\lambda \cdot M$ eruit laten bestaan dat elke coëfficiënt van de matrix M met λ wordt vermenigvuldigd.
- (v) Voor een willekeurige verzameling S vormt de verzameling van afbeeldingen $\phi : S \rightarrow L$ naar een lichaam L een vectorruimte als we optelling definiëren door $(\phi_1 + \phi_2)(s) = \phi_1(s) + \phi_2(s)$ voor $s \in S$, en scalaire vermenigvuldiging door $(\lambda \cdot \phi)(s) = \lambda \times \phi(s)$ voor $s \in S$, $\lambda \in L$. We geven die ruimte wel aan met L^S . Merk op dat met $S = \{1, 2, \dots, n\}$ we L^n vinden, dat $L^\mathbb{N} = L^\infty$ en dat $M_{m \times n}(L)$ hetzelfde is als L^S voor $S = \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$.
- (vi) Met $L = \mathbb{R}$ en I een open interval van $\mathbb{R}$ is $L^S = \mathbb{R}^I$ de vectorruimte van *reëelwaardige functies* op I . Eisen we dat de functies k -maal continu differentieerbaar zijn, dan geven we die ruimte wel met $\mathcal{C}^{(k)}(I)$ aan. Zo bestaat $\mathcal{C}^{(0)}(\mathbb{R})$ uit de continue reële functies.

Definitie 2.4 Een L -lineaire deelruimte van een L -vectorruimte V is een deelverzameling $U \subset V$ met de eigenschap dat:

- (i) $0 \in U$;
- (ii) $u_1 + u_2 \in U$ voor alle $u_1, u_2 \in U$;
- (iii) $\lambda \cdot u \in U$ voor elke $\lambda \in L$ en $u \in U$.

Opmerkingen 2.5 Net als in het reële geval geldt : een deelverzameling $U \subset V$ is een L -vectorruimte (met de optelling en vermenigvuldiging zoals gedefinieerd op heel V) dan en slechts dan als U een L -lineaire deelruimte van V is.

Net als bij (deel)lichamen is dit vaak een handig middel om te laten zien dat een (deel)verzameling van een bekende vectorruimte een vectorruimte vormt.

Elke vectorruimte V heeft minstens twee lineaire deelruimten: $\{0\}$ en V zelf (die alleen samenvallen als $V = \{0\}$). Merk op dat de lege verzameling geen vectorruimte vormt.

Een direct gevolg van de definitie is ook: *de doorsnede van twee (of: willekeurig veel) lineaire deelruimten is zelf weer een lineaire deelruimte*.

Vanaf nu laten we de toevoeging L - wel weg bij vectorruimten, als het onbelangrijk is over welk lichaam het gaat, of als dat wel duidelijk is uit de context.

Definities 2.6 Een L -lineaire combinatie van een rijtje elementen $v_1, \dots, v_k$ uit een L -vectorruimte V is een element van de vorm $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$ in V , waar $\lambda_i \in L$.

Het L -opspansel van het rijtje $v_1, \dots, v_k$ is de verzameling van alle L -lineaire combinaties van $v_1, \dots, v_k$:

$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \{ \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_k \cdot v_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in L \}.$$

Opmerkingen 2.7 Het is wederom niet moeilijk om in te zien dat het opspansel van een rijtje $v_1, \dots, v_k$ uit V een lineaire deelruimte van V vormt, en volgens de definitie van lineaire deelruimte bevat elke lineaire deelruimte met daarin de vectoren $v_1, \dots, v_k$ ook het opspansel: het opspansel $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ is dus de *kleinste* lineaire deelruimte die ze allemaal bevat. Het is ook duidelijk dat het opspansel alleen van de verzameling vectoren afhangt, en niet van hun volgorde.

Definities 2.8 Een *volledig stelsel* (of ook wel *opspannend stelsel*) vectoren voor een vectorruimte V is een rijtje $v_1, v_2, \dots, v_k$ van elementen van V zodat $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$; we zeggen dat deze v_i de ruimte V *opspannen* (over L). Een L -*basis* voor een vectorruimte V is een volledig stelsel dat bovendien onafhankelijk is over L ; hier heet $v_1, v_2, \dots, v_k$ een *onafhankelijk stelsel* over L als voor $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in L$ geldt:

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_k \cdot v_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0.$$

Een stelsel dat niet onafhankelijk is heet natuurlijk *afhankelijk*.

Opmerkingen 2.9 Misschien is het merkwaardig om het begrip afhankelijk zo door een (dubbele) ontkenning te definiëren: onafhankelijk betekent niet onafhankelijk, dat wil zeggen, het is niet zo dat er geen ander stel scalaires bestaat dan allemaal nullen die als lineaire combinatie van het stelsel de nulvector opleveren. Maar dat kunnen we ook positief formuleren: een rijtje $v_1, v_2, \dots, v_k$ van elementen van V is *afhankelijk* dan en slechts dan als er scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ bestaan die niet allemaal 0 zijn maar waarvoor $\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_k \cdot v_k = 0$ in V .

Definities 2.10 Nog voordat we nu de dimensie van een vectorruimte definiëren, kunnen we alvast het volgende onderscheid maken: een vectorruimte V heet *eindig-dimensionaal* wanneer V het opspansel is van een eindig rijtje vectoren uit V , en anders *oneindig dimensionaal*.

Op grond van de onderstaande stelling kunnen we bovendien de *dimensie* $\dim V$ van een eindig-dimensionale vectorruimte $V \neq \{0\}$ definiëren als het maximale aantal onafhankelijke vectoren in V ; voor oneindig-dimensionale vectorruimten bestaat dat maximum niet. De nulruimte $\{0\}$ heeft per definitie dimensie 0.

Opmerkingen 2.11 Zodra een basis $\mathcal{B} = b_1, \dots, b_n$ voor een L -vectorruimte is gekozen, kan elk element $v \in V$ op unieke manier gerepresenteerd worden door een *coördinatenvector* $v = (v_1, \dots, v_n)_{\mathcal{B}} \in L^n$, namelijk zo dat

$$v = v_1 \cdot b_1 + \dots + v_n \cdot b_n.$$

Maar de omkering is ook waar: als het rijtje vectoren $(b_1, \dots, b_n)$ ervoor zorgt dat elke vector uit V op een unieke manier geschreven kan worden als

$$v = v_1 \cdot b_1 + \dots + v_n \cdot b_n.$$

dan vormt $(b_1, \dots, b_n)$ een basis voor V .

Het is wel belangrijk dat de coördinaten van v afhangen van de gekozen basis!

Lemma 2.12 *Zij V een eindig-dimensionale L -vectorruimte. Dan is er een basis $\mathcal{B} = b_1, b_2, \dots, b_n$ voor V .*

Bewijs Omdat V eindig-dimensionaal is, is er een opspannend rijtje $v_1, \dots, v_k$. Als dit een onafhankelijk stelsel is, hebben we een basis. Als het stelsel afhankelijk is, kunnen we er één vector uit weglaten, want er is een relatie

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_k \cdot v_k = 0$$

waarin niet alle λ_i nul zijn. Neem voor het gemak aan dat $\lambda_k \neq 0$, dan is

$$v_k = -\frac{1}{\lambda_k} (\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_{k-1} \cdot v_{k-1}),$$

en $V = \langle v_1, \dots, v_{k-1}, v_k \rangle = \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle$.

Als $v_1, \dots, v_{k-1}$ onafhankelijk is zijn we klaar, en anders herhalen we dit tot we een onafhankelijk stelsel hebben.

Lemma 2.13 *Zij V eindig-dimensionaal met basis $\mathcal{B} = b_1, b_2, \dots, b_n$. Elke rijtje $v_1, v_2, \dots, v_m$ van $m \geq n + 1$ vectoren in V is afhankelijk.*

Bewijs Met inductie naar n . Voor $n = 1$ is de bewering duidelijk. Voor de inductiestap gebruik je dat je elke v_i kunt schrijven als lineaire combinatie $v_i = \mu_{i1} \cdot b_1 + \mu_{i2} \cdot b_2 + \dots + \mu_{in} \cdot b_n$. Neem aan (zonder verlies van algemeenheid) dat $\mu_{11} \neq 0$, en veeg nu met de coëfficiënten van v_1 , om

$$v'_i = v_i - \frac{\mu_{i1}}{\mu_{11}} \cdot v_1 = (\mu_{i1} - \frac{\mu_{i1}}{\mu_{11}} \mu_{11}) \cdot b_1 + \dots + (\mu_{in} - \frac{\mu_{i1}}{\mu_{11}} \mu_{1n}) \cdot b_n,$$

voor $i \geq 2$ te maken. Op basis $b_1, b_2, \dots, b_n$ hebben deze vectoren v'_i dus een nul als coördinaat bij b_1 en ze liggen daarom in $\langle b_2, \dots, b_n \rangle$. Volgens de inductiehypothese zijn deze $m - 1$ vectoren op een basis van een deelruimte van dimensie $n - 1$ dan afhankelijk; de relatie ertussen geeft door herschrijven een relatie tussen de m vectoren $v_1, v_2, \dots, v_m$.

Opmerkingen 2.14 In feite geeft het bewijs van bovenstaand lemma een bewijs voor de equivalente bewering (in termen van lineaire vergelijkingen): over een willekeurig lichaam heeft elk stelsel van n homogene vergelijkingen in minstens $n + 1$ variabelen minstens één niet-nul oplossing. Immers, een oplossing van het stelsel geeft een relatie tussen de kolommen van de coëfficiëntenmatrix van het stelsel; als er meer onbekenden dan vergelijkingen zijn, dan zijn er meer kolommen (aantal onbekenden) dan rijen (aantal vergelijkingen), dus meer kolomvectoren dan er in een basis voor die vectoren zitten: neem de standaardbasis bijvoorbeeld, die evenveel elementen heeft als er coördinaten, dus rijen, zijn.

Een belangrijk direct gevolg is de zogenaamde *invariantie van de dimensie*, uitgedrukt in de volgende stelling, voor eindig-dimensionale vectorruimten.

Stelling 2.15 (Hoofdstelling van de Lineaire Algebra)

Zij V een eindig-dimensionale L -vectorruimte. Als $\mathcal{B} = b_1, \dots, b_n$ en $\mathcal{C} = c_1, \dots, c_m$ beide een basis voor V vormen, dan is $m = n$.

Voorbeelden 2.16

- (i) De dimensie van L^n is n , en L^∞ is oneindig-dimensionaal. De *standaardbasis* $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ van L^n bestaat uit de vectoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (ii) $M_{m \times n}(L)$ is een vectorruimte van dimensie mn .
 (iii) $L[x]$ is oneindig dimensionaal, voor elk lichaam L .

Opmerkingen 2.17 Er zijn heel veel beweringen over eindig-dimensionale vectorruimten die volgen uit wat we al bewezen hebben, soms met een klein beetje werk. Zo is elke deelstelsel van een onafhankelijk stelsel zelf weer onafhankelijk, en is elk stelsel dat een afhankelijk stelsel omvat zelf weer afhankelijk. Een onafhankelijk stelsel kan nooit meer elementen bevatten dan de dimensie van de vectorruimte, en een stelsel dat onafhankelijk is en uit $\dim V = n$ vectoren bestaat moet wel een basis zijn; anderzijds, elk stelsel van $\dim V = n$ vectoren dat V opspant moet wel onafhankelijk zijn. Elk stelsel onafhankelijke vectoren kan aangevuld worden tot een basis voor V , en elk opspannend stelsel is uit te dunnen tot een basis.

Hieruit volgt ook de volgende stelling.

Stelling 2.18 *Elke lineaire deelruimte U van een eindig-dimensionale vectorruimte V is eindig-dimensionaal, en er geldt $\dim U \leq \dim V$. Bovendien geldt: als $\dim U = \dim V$ dan is $U = V$.*

Huiswerkopgaven I

♠ **Huiswerk I-1.** Deze opgave gaat over de definitie van lineaire deelruimte in 2.4.

- (i) Laat zien dat als we voorwaarde 2.4(i) zouden weglaten, de lege verzameling altijd een lineaire deelruimte zou zijn.
- (ii) Laat zien dat conditie 2.4(i) vervangen kan worden door de eis 2.4(i)' dat U niet-leeg is.
- (iii) Geef een voorbeeld van een deelverzameling die geen lineaire deelruimte is maar die wel aan 2.4(i) en 2.4(ii) voldoet.
- (iv) Geef een voorbeeld van een deelverzameling die geen lineaire deelruimte is maar die wel aan 2.4(i) en 2.4(iii) voldoet.

Conclusie: geen van de voorwaarden kan gemist worden, maar 2.4(i) mag weggelaten worden als we eisen dat U niet leeg is.

♠ **Huiswerk I-2.** Laat V een vectorruimte over een willekeurig lichaam L zijn, laat $n \geq 1$ een natuurlijk getal zijn, en $R = v_1, v_2, \dots, v_n$ een rijtje vectoren uit V . Bewijs de volgende beweringen.

- (i) R is afhankelijk als de nulvector er in voorkomt
- (ii) Als $n = 1$, dan is R onafhankelijk dan en slechts dan als $v_1 \neq 0$.
- (iii) Als $n = 2$, dan is R onafhankelijk tenzij één van de vectoren een scalair veelvoud van de ander is.
- (iv) Als $n \geq 3$, dan is R afhankelijk wanneer één van de vectoren een scalair veelvoud van de ander is, maar R kan ook afhankelijk zijn zonder dat deze eigenschap geldt.

♠ **Huiswerk I-3.** Laat K een lichaam zijn. We schrijven elementen uit K^n als rij-vectoren.

- (i) Laat zien dat de verzameling W bestaande uit elementen $(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) \in K^5$ met $w_2 - w_3 - w_4 = 0$ een lineaire deelruimte van K^5 vormt.
- (ii) Wat is de dimensie van W ? Geef ook een basis voor W .
- (iii) Laat zien dat de rationale oplossingen van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 &= 0\end{aligned}$$

een lineaire deelruimte U van $\mathbb{Q}^3$ vormen.

- (iv) Geef de dimensie en een basis voor U .

♠ **Huiswerk I-4.** Weer is K een lichaam, en $M_n(K)$ bestaat uit de vierkante $n \times n$ matrices over K .

- (i) Laat zien dat de verzameling D_n van $n \times n$ *diagonaalmatrices* over K (alleen op de diagonaal mogen elementen $\neq 0$ zijn) een lineaire deelruimte is van $M_n(K)$.
- (ii) Bepaal de dimensie van D_n , en geef een basis voor D_n .
- (iii) Hoeveel elementen heeft D_n als $K = \mathbb{F}_3$ een lichaam met 3 elementen is?

♠ **Huiswerk I-5.** Laat V een K -vectorruimte zijn.

- (i) Bewijs dat de doorsnede $W_1 \cap W_2$ van twee lineaire deelruimten W_1, W_2 van V weer een lineaire deelruimte van V is.
- (ii) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de vereniging $W_1 \cup W_2$ van twee lineaire deelruimten van V niet weer een lineaire deelruimte van V hoeft te zijn.
- (iii) Bewijs dat zelfs geldt voor lineaire deelruimten W_1, W_2 van V dat $W_1 \cup W_2$ een lineaire deelruimte van V is dan en slechts dan als $W_1 \subset W_2$ of $W_2 \subset W_1$.