Hoofdstuk 4

Lineaire afbeeldingen

In de algebra spelen naast algebraïsche structuren zelf ook de afbeeldingen ertussen die (een deel van) de structuur bewaren, een belangrijke rol. Voor vectorruimten zijn dat de lineaire afbeeldingen.

Definities 4.1 Een *L-lineaire afbeelding* tussen L-vectorruimten V en W is een afbeelding $f\colon V \to W$ die voldoet aan

[A1] $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ voor alle $v_1, v_2 \in V$;
[A2] $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ voor alle $v \in V$ en $\lambda \in L$.

Als $V = W$ dan heet een L-lineaire afbeelding ook wel een *(lineaire) transformatie* of een *endomorfisme*. Als $W = L = L^1$ (de L-vectorruimte van dimensie 1) dan heet een L-lineaire afbeelding ook wel een *lineaire functionaal*.

Opmerkingen 4.2 Veel belangrijke eigenschappen van L-lineaire afbeeldingen f volgen uit de definities net zo als in het reële geval:

(i) $f(0) = 0$;
(ii) $f(-v) = -f(v)$ voor elke $v \in V$;
(iii) $f(v_1 + \lambda \cdot v_2) = f(v_1) + \lambda \cdot f(v_2)$ voor elke $\lambda \in L$ en alle $v_1, v_2, \in V$;
(iv) $f(\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2 + \cdots + \lambda_k \cdot v_k) = \lambda_1 \cdot f(v_1) + \lambda_2 \cdot f(v_2) + \cdots + \lambda_k \cdot f(v_k)$ voor alle natuurlijke getallen k, alle $\lambda_i \in L$ en alle $v_i \in V$.

Het is niet moeilijk in te zien dat (iii) en (iv) elk equivalent zijn met eigenschap [A1] en [A2] samen. Dat verklaart de naam 'lineaire' afbeelding.

Na verloop van tijd laten we de L in L-lineaire afbeelding vaak weg; bedenk wel dat $f : V \to W$ alleen een lineaire afbeelding kan zijn als V en W vectorruimten over hetzelfde lichaam L zijn.

Voorbeelden 4.3 (i) De afbeelding $0 : V \to W$ die aan alle $v \in V$ het nulelement 0_W van W toevoegt is altijd een L-lineaire afbeelding als V en W beide L-vectorruimten zijn. Dit heet natuurlijk de *nulafbeelding*.

(ii) De afbeelding $\mathrm{id} : V \to W$ die aan elk element $v \in V$ zichzelf toevoegt, $\mathrm{id}(v) = v$, is een L-lineaire afbeelding als V een lineaire deelruimte van W is, bijvoorbeeld wanneer $W = V$. Dit heet de *identieke afbeelding*.

(iii) De afbeelding a die aan een polynoom $g \in L[x]$ zijn afgeleide $a(g) = g'$ toevoegt, is een L-lineaire afbeelding op $L[x]$, die natuurlijk de *afgeleide* heet.

(iv) De afbeelding p die aan een polynoom $g \in L[x]$ zijn primitieve $a(g) = h = \int g \, \mathrm{d}x$ toevoegt met $h(0) = 0$, is een L-lineaire afbeelding op $L[x]$, die de *primitieve* heet.

(v) De afbeelding $b(g) = \int_u^v g(x)\mathrm{d}x$ is een R-lineaire functionaal op de vectorruimte van alle continue, reëelwaardige functies op $\mathbb{R}$, voor elk vast paar reële getallen u, v met $u < v$. Zo'n functie heet een *bepaalde integraal* van g.

Definities 4.4 Laat f een L-lineaire afbeelding van V naar W. De *kern* van f, notatie $\mathrm{Ker}f$, is de deelverzameling $\mathrm{Ker}f = \{v : v \in V \mid f(v) = 0\}$ van V. Het *beeld* van f, notatie $\mathrm{Im}f$, is de deelverzameling $\mathrm{Im}f = \{f(v) : v \in V\ \}$ van W.

Opmerkingen 4.5 Er bestaat wel eens misverstand over de naam 'beeld'; het beeld moet niet verward worden met het *bereik* van de afbeelding, want dat is de vectorruimte W waarheen f afbeeldt. Het beeld is een deelverzameling (in feite: deelruimte, zoals we zullen zien) van het bereik. Het *domein* van f is de vectorruimte V waarop f gedefinieerd is.

Stelling 4.6 *De kern* $\mathrm{Ker}f$ *van een lineaire afbeelding* $f : V \to W$ *is een lineaire deelruimte van het domein* V*, en het beeld* $\mathrm{Im}f$ *is een lineaire deelruimte van het bereik* W*. Als bovendien geldt dat* V *eindig-dimensionaal is, dan zijn ook* $\mathrm{Ker}f$ *en* $\mathrm{Im}f$ *dat, en dan geldt*

$$\dim \mathrm{Ker}f + \dim \mathrm{Im}f = \dim V.$$

Bewijs. De beweringen over lineaire deelruimten volgen direct uit de definities. Als V eindig-dimensionaal is, kunnen we een basis $b_1, b_2, \ldots, b_n$ kiezen. Omdat elke vector van V een unieke lineaire combinatie van de b_i is, is elke vector in $\mathrm{Im}f$ een lineaire combinatie van de beelden $f(b_i)$: het beeld is opspansel van deze vectoren en dus is de dimensie ten hoogste n. Voor de kern is dat ook duidelijk omdat het een deelruimte van V zelf is. Als de dimensie van $\mathrm{Ker}f$ gelijk aan k is, kunnen we er een basis $u_1, \ldots, u_k$ voor kiezen; vul deze basis aan met vectoren $v_1, \ldots, v_m$ van V tot een basis $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_m$ van V. Dan moet $k + m = n$. Vanwege de zojuist gemaakte opmerking wordt $\mathrm{Im}f$ opgespannen door de beelden $f(u_1), \ldots, f(u_k), f(v_1), \ldots, f(v_m)$. Maar $f(u_1) = \cdots = f(u_k) = 0$, dus $\mathrm{Im}f$ wordt opgespannen door de beelden $f(v_1), \ldots, f(v_m)$.

Veronderstel nu eens dat $\mu_1 \cdot f(v_1) + \cdots + \mu_m \cdot f(v_m) = 0$, oftewel, vanwege lineariteit, $f(\mu_1 \cdot v_1 + \cdots + \mu_m \cdot v_m) = 0$, dat wil zeggen, $\mu_1 \cdot v_1 + \cdots + \mu_m \cdot v_m$ zit in de kern van f, en is dus uniek te schrijven als $\lambda_1 \cdot u_1 + \cdots + \lambda_k \cdot u_k$. Maar dan is

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \cdots + \lambda_k \cdot u_k - \mu_1 \cdot v_1 - \cdots - \mu_m \cdot v_m = 0.$$

Dat kan alleen als alle λ_i en μ_j gelijk aan 0 zijn, want de u_i en v_j vormen een basis voor V. Dus de vectoren $f(v_1), \ldots, f(v_m)$ zijn lineair onafhankelijk: ze vormen een basis voor $\mathrm{Im}f$. Maar dan hebben we $k = \dim \mathrm{Ker}f$ en $m = \dim \mathrm{Im}f$, terwijl $k + m = n = \dim V$, hetgeen te bewijzen was.

Opmerkingen 4.7 Het is belangrijk vast te stellen dat het beeld van een lineaire afbeelding volledig vastligt door het beeld van de basisvectoren van het domein.

Definities 4.8 Een afbeelding h heet *injectief* (of ook wel $1-1$) als geldt dat $h(x) \neq h(y)$ als $x \neq y$ (en dus $h(x) = h(y)$ alleen wanneer $x = y$). De afbeelding heet *surjectief* (of ook wel 'op') als bij elke z uit het bereik van h er een x in het domein is met $h(x) = z$; het beeld valt dus samen met het bereik. Een *bijectie* is een afbeelding die injectief en surjectief is.

Een *L-isomorfisme (van L-vectorruimten)* is een L-lineaire afbeelding die tevens bijectie is; als er een isomorfisme tussen V en W bestaat heten ze *isomorf*: $V \cong W$ (precieser: L-isomorf, notatie $V \cong_L W$). In het speciale geval dat $W = V$ heet zo'n isomorfisme een *automorfisme*.

Opmerkingen 4.9 Onder isomorfismen worden belangrijke lineaire eigenschappen behouden, zoals (on)afhankelijkheid. Als twee L-vectorruimten dezelfde eindige dimensie n hebben, dan zijn ze daarom isomorf: een isomorfisme wordt gegeven door de elementen van de basis van de één naar die van de ander af te beelden. Beide zijn dus isomorf met L^n.

Stelling 4.10 *Laat $f : V \to W$ een lineaire afbeelding van vectorruimten zijn. Dan zijn equivalent:*

(i) *f is injectief;*
(ii) $\mathrm{Ker} f = \{0\}$.

Is V eindig-dimensionaal, dan zijn deze twee bovendien equivalent met

(iii) $\dim \mathrm{Im} f = \dim V$.

Als, tenslotte, ook nog $\dim W = \dim V$*, dan zijn deze drie equivalent met*

(iv) *f is surjectief;*

Bewijs. Omdat 0 in de kern van elke lineaire afbeelding zit, moet $\mathrm{Ker} f = \{0\}$ als f injectief is. Als, omgekeerd, $\mathrm{Ker} f = \{0\}$, volgt uit $f(v_1) = f(v_2)$, dat $0 = f(v_1) - f(v_2) = f(v_1 - v_2)$ en dus $v_1 - v_2 \in \mathrm{Ker} f = \{0\}$, zodat $v_1 = v_2$ en f injectief is.

Als V eindig-dimensionaal is, dan volgt uit Stelling 4.6 dat $\dim \mathrm{Ker} f = 0$ dan en slechts dan als $\dim \mathrm{Im} f = \dim V$. In dit geval is $\mathrm{Im} f$ een lineaire deelruimte van W van dimensie $\dim V$, en de laatste bewering volgt.

Matrices

Net als in het reële geval kunnen we een L-lineaire afbeelding $f : V \to W$ tussen eindig-dimensionale L-vectorruimten representeren met behulp van matrices; kiezen we een basis $\mathcal{B} = b_1, \ldots, b_n$ voor V kiezen en een basis $\mathcal{C} = c_1, \ldots, c_m$ voor W, dan kunnen we f: $V \to W$ geven door middel van de matrix

$$M_f = {}^{\mathcal{C}}M_f^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m\times n}(L),$$

die aangeeft wat het beeld $w = f(v)$ als coördinatenvector ten opzichte van de basis $\mathcal{C}$ is van een vector v, gegeven als coördinatenvector ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$, namelijk

$$M_f(v) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = w.$$

De kolommen van de matrix ${}^{\mathcal{C}}M_f^{\mathcal{B}}$ bestaan uit beelden $f(b_1), \ldots, f(b_n)$ van de basisvectoren, uitgedrukt op de basis $\mathcal{C}$. Zoals we eerder zagen wordt het $\mathrm{Im}f$ opgespannen door de beeldvectoren $f(b_i)$.

Voorbeeld 4.11 Dat de kolommen van ${}^{\mathcal{C}}M_f^{\mathcal{B}}$ bestaan uit de beelden van de basisvectoren zorgt ervoor dat we in sommige gevallen de matrix van een lineaire afbeelding heel eenvoudig kunnen bepalen. Als voorbeeld nemen we de matrix M_ϕ van een *rotatie* in de $\mathbb{R}^2$ over een hoek ϕ (met de klok mee) ten opzichte van de standaardbasis. Het beeld van het punt met coördinaten $(1, 0)$ heeft coördinaten $(\cos\phi, -\sin\phi)$, en het beeld van $(0, 1)$ zal het punt $(\sin\phi, \cos\phi)$ zijn. Vatten we als gebruikelijk de vectoren met deze eindpunten op als kolomvectoren, dan zien we dat

$$M_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

In het algemeen is de matrix $M_f = {}^{\mathcal{C}}M_f^{\mathcal{B}}$ is sterk afhankelijk van de keuze van de bases $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$. Een lineaire afbeelding f van L^n naar L^m met daarop keuze voor bases $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ bepaalt een unieke matrix ${}^{\mathcal{C}}M_f^{\mathcal{B}} \in \mathrm{M}_{m\times n}(L)$. Omgekeerd bepaalt zo'n matrix een lineaire afbeelding van L^n naar L^m bij basiskeuze.

Het samenstellen van lineaire afbeeldingen $h = g \circ f$ waar $f\colon V \to W$ en $g\colon W \to X$, correspondeert met het vermenigvuldigen van de bijbehorende matrices: $M_h = M_g \cdot M_f$, waarbij we dan wel moeten zorgen dat f en g gegeven worden ten opzichte van *dezelfde* basis $\mathcal{C}$ voor W:

$${}^{\mathcal{D}}M_h^{\mathcal{B}} = {}^{\mathcal{D}}M_g^{\mathcal{C}} \cdot {}^{\mathcal{C}}M_f^{\mathcal{B}}.$$

Definities 4.12 Een lineaire afbeelding f van V naar W is *inverteerbaar* als er een *inverse* lineaire afbeelding f^{-1} van W naar V bestaat met de eigenschap dat $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_V$ en $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_W$, de identieke afbeeldingen op V en W.

Opmerkingen 4.13 Als een lineaire afbeelding inverteerbaar is, dan moet f injectief zijn, en dan is de inverse f^{-1} uniek bepaald. Voor een lineaire afbeelding $f : V \to W$ tussen eindig-dimensionale vectorruimten van dezelfde dimensie n is inverteerbaarheid van f dan equivalent met de eis dat de vierkante matrix M_f *inverteerbaar* is, dat wil zeggen, er is een vierkante matrix A met dezelfde afmetingen zodat $A \cdot M_f = M_f \cdot A = I_n$, de $n \times n$ eenheidsmatrix. Deze inverse A is natuurlijk de matrix $M_{f^{-1}}$ van de afbeelding f^{-1}, en er geldt dus dat $A = M_{f^{-1}} = M_f^{-1}$. Merk nogmaals op dat we eigenlijk moeten schrijven $M_f = {}^{\mathcal{C}}M_f^{\mathcal{B}}$, omdat deze van basiskeuzen afhangt, en dat dan $M_{f^{-1}} = {}^{\mathcal{B}}M_{f^{-1}}^{\mathcal{C}}$.

Laat V nu eindig-dimensionaal met basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ zijn, en f een lineaire transformatie van V die inverteerbaar is. Dan geeft f een automorfisme van V, en vormen de beelden $\{f(b_1), \ldots, f(b_n)\}$ ook weer een basis van V. De matrix ${}^{\mathcal{B}}M_f^{\mathcal{B}}$ heeft in de i-de kolom de coördinatenvector van het beeld $f(b_i)$ ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$. Nemen we als nieuwe basis $\mathcal{C}$ voor V de vectoren $c_i = f(b_i)$, dan kunnen we de matrix met in de i-de kolom de coördinaten van $f(b_i) = c_i$ op basis $\mathcal{B}$ natuurlijk ook interpreteren als de matrix van de afbeelding die c_i geschreven op basis $\mathcal{C}$ stuurt naar c_i geschreven op basis $\mathcal{B}$. Met andere woorden,

$${}^{\mathcal{B}}M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{C}} = {}^{\mathcal{B}}M_f^{\mathcal{B}}.$$

Maar dan is de matrix die de b_i op basis $\mathcal{C}$ schrijft ook gemakkelijk te vinden:

$$ {}^{\mathcal{C}}M^{\mathcal{B}}_{\mathrm{id}} = \left({}^{\mathcal{B}}M^{\mathcal{C}}_{\mathrm{id}}\right)^{-1} = \left({}^{\mathcal{B}}M^{\mathcal{B}}_{f}\right)^{-1}. $$

De matrices ${}^{\mathcal{B}}M^{\mathcal{C}}_{\mathrm{id}}$ en ${}^{\mathcal{C}}M^{\mathcal{B}}_{\mathrm{id}}$ zijn van groot belang; ze geven *coördinatentransformaties*. Als een vector v gegeven is op basis $\mathcal{B}$, dan is ${}^{\mathcal{C}}M^{\mathcal{B}}_{\mathrm{id}}(v)$ dezelfde vector maar dan uitgeschreven op de basis $\mathcal{C}$. Meestal is de matrix ${}^{\mathcal{B}}M^{\mathcal{C}}_{\mathrm{id}}$ gemakkelijk te vinden (omdat de kolommen de coördinaten van de nieuwe basisvectoren op de oorspronkelijke basis $\mathcal{B}$ zijn) terwijl je de inverse matrix ${}^{\mathcal{C}}M^{\mathcal{B}}_{\mathrm{id}}$ wilt gebruiken om een vector op de nieuwe basis te schrijven.

Voorbeeld 4.14 We bekijken een eenvoudig voorbeeld in $\mathbb{R}^3$. Laat $\mathcal{B}$ een gekozen basis zijn (bijvoorbeeld de 'standaardbasis') ten opzichte waarvan de vector v gegeven is:

$$ v = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}. $$

Gevraagd wordt om de vector v uit te drukken op een nieuwe basis $\mathcal{C}$, als bijvoorbeeld

$$ \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. $$

Merk op dat we de vectoren c_i hier in coördinaten ten opzichte van $\mathcal{B}$ gegeven hebben! Omdat de vectoren c_1, c_2, c_3 een mooie 'diagonaalvorm' hebben, kun je het juiste antwoord direct aflezen: $v = 3c_3 - c_2 - 4c_1$, dus

$$ v = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}. $$

In het algemeen is dat niet zo eenvoudig, maar volgt het antwoord uit

$$ {}^{\mathcal{C}}M^{\mathcal{B}}_{\mathrm{id}}(v) = \left({}^{\mathcal{B}}M^{\mathcal{C}}_{\mathrm{id}}\right)^{-1}(v), $$

waar ${}^{\mathcal{B}}M^{\mathcal{C}}_{\mathrm{id}}$ als kolommen c_1, c_2, c_3 op basis $\mathcal{B}$ heeft. Hier dus:

$$ \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, $$

hetgeen overeenkomt met wat we al zagen.

Laat Φ nu de matrix ${}^{\mathcal{B}}M^{\mathcal{C}}_{\mathrm{id}}$ zijn. Dan zijn we in staat om van een lineaire transformatie g van V gegeven ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$, ook de matrix van g ten opzichte van de nieuwe basis $\mathcal{C}$ te bepalen. Immers, om g ten opzichte van $\mathcal{C}$ te bepalen kunnen we eerst vectoren herschrijven van $\mathcal{C}$ naar $\mathcal{B}$, dan de g ten opzichte van $\mathcal{B}$ nemen en tenslotte weer teruggaan naar de basis $\mathcal{C}$. Dus:

$$ {}^{\mathcal{C}}M^{\mathcal{C}}_{g} = \Phi^{-1} \cdot {}^{\mathcal{B}}M^{\mathcal{B}}_{g} \cdot \Phi. $$

Matrices $A, B \in \mathrm{M}_{n\times n}(L)$ waarvoor een inverteerbare $C \in \mathrm{M}_{n\times n}(L)$ bestaat zodat $A = C^{-1}\cdot B \cdot C$ heten *geconjugeerd* (met elkaar, in $\mathrm{M}_{n\times n}(L)$). Een belangrijk thema in volgende hoofdstukken zal zijn om een met A geconjugeerde matrix te vinden die prettigere eigenschappen heeft dan A zelf, met andere woorden, om door overgang op een andere basis een mooiere matrix voor een gegeven afbeelding te vinden.

Voorbeeld 4.15 We geven een toepassing in $V = \mathbb{R}^2$, namelijk om de matrix M_ℓ te bepalen, ten opzichte van de standaardbasis, van de lineaire afbeelding ℓ die een gegeven vector spiegelt in de lijn $y = 3x$. We maken hier gebruik van de keuzemogelijkheid van een basis, en wel om een basis te kiezen ten opzichte waarvan de matrix eenvoudig op te schrijven valt. Daarna doen we een coördinatentransformatie om terug te gaan naar de standaardbasis.

Laat de speciale basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ voor $\mathbb{R}^2$ zo zijn dat de eerste basisvector b_1 op ℓ ligt, en de tweede er loodrecht op staat. Dus, bijvoorbeeld,

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De matrix ${}^{\mathcal{B}}M_\ell^{\mathcal{B}}$ voor spiegeling in de lijn $y = 3x$ ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$ voor $\mathbb{R}^2$ is eenvoudig, immers het beeld van b_1 (die op ℓ ligt) is b_1 zelf, en van b_2 (die loodrecht op ℓ staat) wordt het spiegelbeeld $-b_2$; met andere woorden:

$${}^{\mathcal{B}}M_\ell^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Volgens het bovenstaande is

$${}^{\mathcal{E}}M_\ell^{\mathcal{E}} = \Phi^{-1} \cdot {}^{\mathcal{B}}M_\ell^{\mathcal{B}} \cdot \Phi,$$

waar $\Phi = {}^{\mathcal{B}}M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{E}}$ aangeeft hoe e_i in $\mathcal{B}$ uit te drukken. Nu is

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{-3}{10}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}b_1 + \frac{-3}{10}b_2,$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{10}b_1 + \frac{1}{10}b_2,$$

dus

$${}^{\mathcal{B}}M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{E}} = \Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{-3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix},$$

$${}^{\mathcal{E}}M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{B}} = \Phi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

zodat

$${}^{\mathcal{E}}M_\ell^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{-3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-8}{10} & \frac{6}{10} \\ \frac{6}{10} & \frac{8}{10} \end{pmatrix}.$$

In dit geval was het gemakkelijk om Φ^{-1} op te schrijven, en moesten we moeite doen om Φ te vinden.