Hoofdstuk 5

Stelsels Vergelijkingen

Eén van de motiverende toepassingen van de lineaire algebra is het bepalen van oplossingen van stelsels lineaire vergelijkingen. De belangrijkste techniek bestaat uit het vegen van matrices.

Definities 5.1 Zij M een $m \times n$-matrix over een lichaam L. Een *elementaire rij-operatie* is één van de volgende drie operaties op M:

(i) het verwisselen van de rijen i en j van M;
(ii) vermenigvuldiging van rij k van M met een scalar $\lambda \neq 0$ uit L;
(iii) het optellen van het scalaire veelvoud μ van rij ℓ van M bij rij m van M (met $\ell \neq m$, en $\mu \in L$).

Deze operaties kunnen bereikt worden door het links-vermenigvuldigen van M met een zogenaamde *elementaire matrix*, dat is een $n \times n$-matrix over L die (corresponderend met de vorige gevallen) van één van de volgende vormen is:

(i) een *permutatiematrix* P_{ij}, verkregen uit I_n door de i-de en de j-de kolom te verwisselen;
(ii) een *diagonaalmatrix* $D_k(\lambda)$ met op de diagonaal overal 1 behalve op positie (k, k) waar $\lambda \neq 0$ staat;
(iii) de matrix $E_{m,\ell}(\mu)$ verkregen uit I_n door op positie (m, ℓ) het getal 0 door μ te vervangen.

Merk op dat steeds de elementaire matrix ontstaat door het toepassen van de overeenkomstige elementaire operatie op I_n.

De elementaire $m \times m$-matrices worden gebruikt om door rechts-vermenigvuldiging de *elementaire kolom-operaties* op de $m \times n$ matrix M toe te passen.

Lemma 5.2 *Elke elementaire matrix is inverteerbaar, en de inverse is een elementaire matrix van hetzelfde type.*

Bewijs Het is eenvoudig na te gaan dat $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$, dat $D_k(\lambda)^{-1} = D_k(\lambda^{-1})$, en dat $E_{m,\ell}(\mu)^{-1} = E_{m,\ell}(-\mu)$.

Definities 5.3 Een $m \times n$-matrix is in *rij echelon vorm* als geldt dat:

(i) Als in een rij een niet-nul element voorkomt, dan gaat deze rij vooraf aan alle nul-rijen;
(ii) het eerste niet-nul element in een rij is 1, en in rij j komt deze voor in kolom $k = k(j)$, waarvoor geldt $k(j) > k(j-1)$ (dus strikt rechts van de eerste niet-nul op de vorige rij).

Geldt bovendien dat voor elke rij dat

(iii) de eerste niet-nul in de rij, op positie $(j, k(j))$, de enige niet-nul in de betreffende $k(j)$-de kolom is,

dan is de matrix in *gereduceerde rij echelon vorm*.

Net zo is de matrix in *kolom echelon vorm* of *gereduceerde kolom echelon vorm* wanneer dezelfde beweringen gelden met 'rij' en 'kolom' verwisseld, dus wanneer de getransponeerde in (gereduceerde) rij echelon vorm is.

De reden dat de elementaire operaties zo belangrijk zijn is gelegen in het behoud van belangrijke eigenschappen.

Definities 5.4 De *rang* van een eindig stelsel vectoren $v_1, \ldots, v_n$ uit een vectorruimte V is de dimensie $\dim\langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ van het opspansel van deze vectoren, en dus het maximale aantal onafhankelijke vectoren in het stelsel. De *(kolommen)rang*, notatie $\mathrm{rang}(M)$, van een matrix M is de rang van het stelsel bestaande uit de kolomvectoren van M; de *rijenrang* is de rang van het stelsel van de rijen van M.

Opmerkingen 5.5 De reden dat we de kolommenrang wel *de rang* van een matrix noemen is natuurlijk dat we straks, net als eerder in het reële geval, zullen zien dat de rijenrang en de kolommenrang altijd gelijk zijn. Merk op dat de kolommenrang ook de dimensie van het beeld van de matrix opgevat als lineaire afbeelding is; de dimensiestelling 4.6 zegt dan dat voor een $m \times n$ matrix M geldt: $\dim \mathrm{Ker}\, M = n - \mathrm{rang}\, M$.

Het prettige van een matrix in rij (of kolom) echelon vorm is dat de rijenrang (of kolommenrang) direct af te lezen is: het is het aantal niet-nul rijen (of kolommen).

Lemma 5.6 *Als M een $m \times n$ matrix over een lichaam is, en G en H zijn $m \times m$ en $n \times n$ inverteerbare matrices, dan is* $\mathrm{rang}\, G \cdot M = \mathrm{rang}\, M \cdot H = \mathrm{rang}\, M$.

Bewijs De matrix $G \cdot M$ is op te vatten als de matrix van de samenstelling van twee lineaire afbeeldingen, namelijk van $g \circ f$, waar $f : L^n \to L^m$ en $g : L^m \to L^m$, bij zekere compatibele keuzes van bases. Omdat G inverteerbaar is, is g injectief, en beeldt de deelruimte $\mathrm{Im}\, f$ van L^m af op de deelruimte $\mathrm{Im}\, g \circ f$ van L^m van dezelfde dimensie:

$$\mathrm{rang}\, G \cdot M = \dim \mathrm{Im}\, g \circ f = \dim \mathrm{Im}\, f = \mathrm{rang}\, M.$$

Net zo volgt uit de injectiviteit van h dat

$$\mathrm{rang}\, M \cdot H = \dim \mathrm{Im}\, f \circ h = \dim \mathrm{Im}\, f = \mathrm{rang}\, M.$$

Stelling 5.7 *Elke $m \times n$ matrix M over een lichaam L is door linksvermenigvuldiging met een matrix E die het product is van elementaire $n \times n$ matrices, over te voeren in een matrix $E \cdot M$ die in gereduceerde rij echelon vorm is. Net zo is M door rechtsvermenigvuldiging met een matrix F die product is van elementaire $m \times m$ matrices, over te voeren in $M \cdot F$ die in gereduceerde kolom echelon vorm is.*

Het bewijs van deze Stelling bestaat, bijvoorbeeld, uit het aangeven van een procedure, die we *vegen* noemen, voor het bereiken van een gereduceerde rij echelon vorm met behulp van elementaire rij-operaties. Herhaal de volgende stappen in de veronderstelling dat we al $k < n$ kolommen bekeken hebben (aanvankelijk $k = 0$) en $r < m$ rijen vastgelegd (aanvankelijk $r = 0$):

(i) Vind de $k+1$-ste kolom; als deze op alle rijen $s \geq r+1$ een nul heeft vervangen we alleen k door $k+1$ en gaan naar de laatste stap; anders gaan we door met de volgende stap.

(ii) Veronderstel dat op in de s-de rij van kolom $k+1$ het element $\alpha \neq 0$ uit L staat, met $s \geq r+1$; vermenigvuldig de hele s-de rij van M met α^{-1} en verwissel deze rij daarna met rij $r+1$.

(iii) Trek de nieuwe rij $r+1$ precies μ_t keer af van de t-de rij, voor alle $t \neq r+1$, waar μ_t het element op de t-de rij van de $k+1$-ste kolom is. Verhoog nu k en r beide met 1 en ga naar de volgende stap.

(iv) Als k nu gelijk aan n is geworden of r gelijk aan m, dan stoppen we, anders door met de eerste stap.

Gevolg 5.8 *Bij elke $m \times n$ matrix M van rang r over een lichaam L bestaan inverteerbare matrices E en F, beide product van elementaire matrices, zodanig dat $E \cdot M \cdot F$ een $m \times n$ matrix is die bestaat uit een $r \times r$ eenheidsmatrix I_r linksboven en verder uitsluitend nullen:*

$$E \cdot M \cdot F = \begin{pmatrix} I_r & O_{r \times (n-r)} \\ O_{(m-r) \times r} & O_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix},$$

waar $O_{a \times b}$ de $a \times b$ nul-matrix over L is.

Bewijs Gebruik de voorgaande stelling om de matrix eerst in gereduceerde rij echelon vorm te brengen en daarna het resultaat in kolom gereduceerde echelon vorm. Het resultaat is van de genoemde vorm, waar r gelijk moet zijn aan de rang omdat deze volgens Lemma 5.6 niet verandert door vermenigvuldiging met E en F.

Gevolg 5.9 *Elke inverteerbare vierkante matrix A is te schrijven als product van elementaire matrices.*

Bewijs Volgens het voorgaande gevolg zijn er inverteerbare E en F bij A te vinden zodat $E \cdot A \cdot F = I_n$. Dan is $A = E^{-1} \cdot F^{-1}$ en het resultaat volgt uit Lemma 5.2.

Gevolg 5.10 *Voor elke $m \times n$ matrix M is $\operatorname{rang} M = \operatorname{rang} M^{\top}$, dus de kolommenrang van M is gelijk aan de rijenrang van M.*

Bewijs Op grond van Gevolg 5.8 bestaan er inverteerbare E en F zodat $E \cdot M \cdot F = D_r$, de matrix met r enen op de posities (i,i) voor $1 \leq i \leq r$ en verder nullen. Dan is

$$D_r^{\top} = F^{\top} \cdot M^{\top} \cdot E^{\top},$$

en

$$\operatorname{rang} M^{\top} = \operatorname{rang} F^{\top} \cdot M^{\top} \cdot E^{\top} = \operatorname{rang} D_r^{\top} = r = \operatorname{rang} D_r = \operatorname{rang} E \cdot M \cdot F = \operatorname{rang} M,$$

omdat E, F en dus ook hun getransponeerden $E^{\top}, F^{\top}$, inverteerbaar zijn.

Definitie 5.11 De *geaugmenteerde matrix* $A|B$ van een $m \times n$ matrix A en een $m \times r$ matrix B over hetzelfde lichaam L is de $m \times (n+r)$ matrix die bestaat uit de n kolommen van A gevolgd door de r kolommen van B.

Gevolg 5.12 *Een $n \times n$ matrix A is inverteerbaar dan en slechts dan als de geaugmenteerde matrix $A|I_n$ door elementaire rij-operaties is over te voeren in een geaugmenteerde matrix $I_n|B$, en bovendien is $B = A^{-1}$ in dat geval.*

Bewijs Pas op $A|I_n$ rij-operaties toe die A in gereduceerde rij echelon vorm brengen. A is inverteerbaar dan en slechts dan als het resultaat rang n heeft, en dan is alleen I_n is in gereduceerde rij echelon vorm. Bovendien is A inverteerbaar dan en slechts dan als het een product $A = \prod_{i=1}^{n} E_i$ van elementaire matrices is, en het overvoeren in I_n wordt dan bereikt door achtereenvolgens $E_k^{-1}, \ldots E_1^{-1}$ op de rijen van $A|I_n$ los te laten. Het resultaat op de laatste n kolommen is juist het overvoeren van I_n in $\prod_{i=n}^{1} E_i^{-1} = A^{-1}$.

Stelsels lineaire vergelijkingen

We trekken nu een aantal conclusies over de oplossingsverzamelingen van stelsels lineaire vergelijkngen.

Definities 5.13 De m vergelijkingen

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \cdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

heten samen een *stelsel van m lineaire vergelijkingen in n variabelen* over het lichaam L waar de a_{ij} en de b_i element van zijn. Het stelsel het *homogeen* als $b_i = 0$ voor $i = 1, \ldots, m$, en anders *inhomogeen*. De matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n} \in \mathrm{M}_{m \times n}(L)$ heet de *coëfficiëntenmatrix* van het stelsel, en $A|b$ heet de *geaugmenteerde matrix* van het stelsel. We noteren het stelsel als matrixvergelijking $A \cdot x = b$.

Stelling 5.14 *Het stelsel $A \cdot x = b$ heeft een oplossing in L dan en slechts dan als* $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A|b$*; als er een oplossing $y = (y_1, \ldots, y_n)^\mathsf{T}$ is, dan worden alle oplossingen precies gegeven door $y + \operatorname{Ker} A = \{y + z \;:\; z \in \operatorname{Ker} A\}$.*

Bewijs Een oplossing y geeft precies b als een lineaire combinatie van de kolommen A_i van A, want $y_1 \cdot A_1 + \cdots + y_n \cdot A_n = b$. De andere beweringen volgen direct uit lineariteit: y en z zijn beide oplossing dan en slechts dan als $A(y - z) = Ay - Az = b - b = 0$, dus als $y - z$ in de kern van A zit.

Gevolg 5.15 *Elk homogeen stelsel heeft oplossingen, en alleen in het homogene geval vormt de oplossingsverzameling een lineaire deelruimte van L^n, van dimensie* $\dim \operatorname{Ker} A = n - \dim \operatorname{rang} A$*. De oplossing van het stelsel $A \cdot x = b$ is uniek dan en slechts dan als A een inverteerbare $n \times n$ matrix is; in dat geval is de unieke oplossing $A^{-1} \cdot b$.*

Bewijs Volgt direct uit de voorgaande stelling en de dimensiestelling 4.6.

Opmerkingen 5.16 Een verzameling van de vorm $T = \{y + u \;:\; u \in U\}$, voor een lineaire deelruimte U van V, heet wel een *lineaire varieteit*; dit is alleen een lineaire deelruimte van V als 0 er in zit, dat wil zeggen, wanneer $y \in U$. Zo'n lineaire varieteit is een soort verschoven lineaire deelruimte, en we zeggen wel dat de dimensie ervan gelijk is aan $\dim U$. Denk bijvoorbeeld aan een vlak dat niet door de oorsprong gaat in de $\mathbb{R}^3$.

Stelling 5.17 *Het stelsel lineaire vergelijkingen $A \cdot x = b$ heeft dezelfde oplossingsverzameling als het stelsel $A' \cdot x = b'$, waar $A'|b'$ is verkregen door een elementaire rij operatie op $A|b$ toe te passen, en deze is ook gelijk aan de oplossingsverzameling van het stelsel $A^* \cdot x = b^*$, waar $A^*|b^*$ de gereduceerde rij echelon vorm van $A|b$ is.*

Bewijs Het is heel eenvoudig na te gaan dat verwisselen van rijen, vermenigvuldigen met een scalar, en het optellen van een rij bij een ander, de oplossingsverzameling niet verandert. Herhaald toepassen geeft de laatste bewering.

Het daadwerkelijk oplossen van een stelsel van m vergelijkingen in n variabelen is nu eenvoudig door het vegen van de geaugmenteerde matrix van het stelsel. In dit verband wordt de methode Gauss-eliminatie genoemd. Het resultaat is de geaugmenteerde matrix in rij gereduceerde vorm, waaruit de oplossingen, als ze bestaan, onmiddellijk zijn af te lezen.

Voorbeeld 5.18 We geven een voorbeeld van het oplossen van een inhomogeen stelsel vergelijkingen over het eindige lichaam $\mathbb{F}_5$ van 5 elementen. Laat het stelsel van vier vergelijkingen

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & & & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & & & + & x_5 & = & 2 \\ & & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 1 \end{array}\right.$$

in 5 variabelen gegeven zijn; de coëfficiënten zijn restklassen modulo 5, en gevraagd wordt de oplossingsruimte. Vegen met de rijen leidt tot de gereduceerde rij echelon vorm

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & + & x_3 & & + & 3x_5 & = & 1 \\ & x_2 & & + & 2x_3 & & + & x_5 & = & 2 \\ & & & & & x_4 & + & 2x_5 & = & 3 \\ 0 & & & & & & & & = & 0 \end{array}\right.$$

Dat is hetzelfde als

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & = & 1 & + & 4x_3 & + & 2x_5 \\ x_2 & = & 2 & + & 3x_3 & + & 4x_5 \\ x_4 & = & 3 & & & + & 3x_5 \end{array}\right.$$

waaruit we de 2-dimensionale oplossingsruimte

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

direct aflezen; hier mogen x_3 en x_5 vrij gekozen worden uit $\mathbb{F}_5$.

Determinant

We vatten de eigenschappen van de determinant samen. Deze eigenschappen kunnen voor een willekeurig lichaam L geheel analoog aan het geval $L = \mathbb{R}$ afgeleid worden.

Definities 5.19 We beginnen met een $n \times n$ matrix A over L. De *cofactor* van de coëfficiënt A_{ij} is $(-1)^{i+j} \det A_{(i,j)}$, waar $A_{(i,j)}$ de $(n-1) \times (n-1)$-matrix is verkregen uit A door daaruit de i-de rij en de j-de kolom weg te laten.

Dan is

(1) $\det(A) = A_{11}$ als $A \in \mathrm{M}_{1\times 1}(L)$, dus $n = 1$;

(2) $\det(A) = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}$ als $A \in \mathrm{M}_{2\times 2}(L)$ dus $n = 2$;

(n) $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \det A_{(i,j)}$ als $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(L)$ en $1 \le j \le n$.

Hier kan deze *ontwikkeling naar de j-de kolom* ook vervangen worden door de *ontwikkeling naar de i-de rij*:

(n') $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} A_{ik} \det A_{(i,k)}$ met $1 \le i \le n$.

Opmerkingen 5.20 In feite staat hier zowel een definitie als een stelling. Meestal wordt als definitie voor de determinant de ontwikkeling naar de *eerste* kolom genomen. We moeten dan laten zien dat het resultaat hetzelfde is als de ontwikkeling naar elke andere kolom, en naar een willekeurige rij. Dat volgt uit de eigenschappen die we hieronder geven (en niet allemaal bewijzen).

Er zijn ook alternatieve definities. Zo kan de determinant worden gedefinieerd als de unieke alternerende multilineaire afbeelding op $\mathrm{M}_{n\times n}(L)$ die waarde 1 heeft op de eenheidsmatrix I_n. Het multilineaire betekent dat de afbeelding det opgevat als functie op n kolommen (van lengte n) lineair is in elk van die n argumenten; het alternerende slaat op de eigenschap, die we beneden nog zullen zien, dat het verwisselen van twee argumenten (kolommen dus) het teken van de determinant omkeert.

Ook wordt de determinant in de $\mathbb{R}^n$ wel gedefinieerd als het *volume* ingesloten door de kolomvectoren van de matrix, met een teken dat een bepaalde oriëntatie aangeeft (in de natuurkunde wel bekend uit de $\mathbb{R}^3$).

We vatten een aantal belangrijke, met elkaar samenhangende, eigenschappen zonder bewijs samen.

Stelling 5.21 (i) *De determinant van een bovendriehoeksmatrix (waarin onder de hoofddiagonaal allemaal nullen staan) en voor een benedendriehoeksmatrix (allemaal nullen boven de diagonaal) is het product van de diagonaal elementen:* $\det A = \prod_{i=1}^{n} A_{ii}$*;*

(ii) *als A een nulrij of nulkolom bevat dan is* $\det A = 0$*;*

(iii) *als A twee identieke rijen of kolommen bevat dan is* $\det A = 0$*;*

(iv) *verwisselen van twee rijen (of kolommen) van A verandert het teken van A;*

(v) *vermenigvuldiging van een rij (of kolom) met een scalar λ geeft een vermenigvuldiging van de determinant met λ;*

(vi) *het optellen van (een veelvoud van) een rij (of kolom) van A bij een andere rij (of kolom) van A laat* $\det A$ *onveranderd;*

(vii) $\det A = 0$ *dan en slechts dan als de kolommen van A afhankelijk zijn.*

Stelling 5.22 *Laten A en B beide $n \times n$ matrices over L zijn. Er geldt*

(i) $\det A \cdot B = \det A \cdot \det B$*;*

(ii) $\det A^{\mathsf{T}} = \det A$*;*

(iii) *als A inverteerbaar is, dan is* $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

Bewijs Als $\operatorname{rang} A < n$ is, dan is zowel $\det A = 0$ als $\det A \cdot B = 0$, want dan is $\operatorname{rang} A \cdot B$ ook kleiner dan n. Als $\operatorname{rang} A = n$ dan is A het product van elementaire matrices. Voor elk van de drie typen elementaire matrices E is het makkelijk na te gaan dat $\det E \cdot B = \det E \cdot \det B$, en het resultaat volgt.

Als $\operatorname{rang} A < n$ is, dan is $\det A = 0$, en $\operatorname{rang} A^{\mathsf{T}} = \operatorname{rang} A < 0$ zodat ook $\det A^t = 0$. Als A inverteerbaar is, is het een product van elementaire matrices, en daarvoor is de bewering waar. De conclusie volgt dan uit het eerste onderdeel.

Uit het eerste onderdeel volgt ook dat voor de inverse van A geldt $\det A^{-1} \cdot \det A = \det I_n = 1$.

De volgende stelling toont het belang en verklaart de naam van de determinant: het bepaalt de inverteerbaarheid. De beweringen volgen uit eerder genoemde eigenschappen.

Stelling 5.23 *De volgende beweringen over een $n \times n$ matrix zijn equivalent;*

(i) *A is inverteerbaar;*
(ii) $\det A \neq 0$*;*
(iii) *de kolommen van A zijn onafhankelijk;*
(iv) *de rijen van A zijn onafhankelijk;*
(v) $\operatorname{rang} A = n$*;*
(vi) $\operatorname{Ker} A = \{0\}$.

Opmerkingen 5.24 Als A inverteerbaar is, dan is

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \frac{1}{\det A} \left((-1)^{i+j} \det A_{(i,j)} \right)^{\mathrm{T}},$$

waar de *geadjungeerde* $\operatorname{adj} A$ van $A \in \mathrm{M}_{n \times n}(L)$ gedefinieerd is als de matrix in $\mathrm{M}_{n \times n}(L)$ met op plaats i, j de cofactor $(-1)^{j+i} \det A_{(j,i)}$. Let op dat dit de i, j-de cofactor van de *getransponeerde* van A is! Dit volgt direct uit de definitie.

Noch deze formule, noch de definitie zelf, geeft een erg efficiënte methode om de determinant van een $n \times n$ matrix A te bepalen. Wederom biedt vegen een practisch alternatief. We moeten er nu echter wel rekening mee houden dat twee van de drie elementaire operaties de waarde van de determinant veranderen! Breng de matrix A door elementaire rij operaties in rij echelon vorm R. Als de rang van de matrix R (en dus A) niet n blijkt te zijn, is $\det A = 0$. In ieder geval is $\det A = \det R \cdot (-1)^k \cdot C^{-1}$, waar $\det R$ het product van de diagonaalelementen van R is, k het aantal verwisselingen van rijen in de overgang van A naar R, en C het product van de scalairen waarmee we rijen van A hebben vermenigvuldigd om R te krijgen.