Huiswerkopgaven III

♠ **Huiswerk III-1. [Universal Product Code** en **International Standard Book Number]**

(i) Beschouw de UPC $(0,7,7,7,7,7,8,6,6,3,5,2,c)$ van een muziek-CD. Bepaal c.
(ii) Ga na dat de UPC $(0,1,2,9,8,1,7,0,0,1,2,6)$ verminkt is; geef twee verschillende correcties van 1 cijfer die tot een correcte UPC leiden.
(iii) Bewijs dat de UPC 1 fout kan detecteren, maar niet kan corrigeren.
(iv) Bepaal het check-digit d van het boek met ISBN $(9,0,6,1,6,8,3,7,9,d)$.
(v) Bewijs dat ISBN 1 fout kan detecteren, maar niet kan corrigeren.
(vi) Bewijs dat ISBN een andere veeloptredende typefout kan detecteren, namelijk de verwisseling van 2 cijfers die naast elkaar staan.
(vii) Is de ISBN codering lineair in de zin dat zowel de nulvector als de som van elk tweetal codewoorden een codewoord is? (Let hierbij niet op de betekenis van cijfers als landenaanduiding etc)

♠ **Huiswerk III-2. [Hamming afstand]**

(i) Bewijs dat $h(v,w)$ tussen twee vectoren v,w uit $\mathbb{F}_q^n$ gelijk is aan het gewicht van de vector $v-w$.
(ii) Laat ook zien dat de minimumafstand van een code gelijk is aan het minimumgewicht van de code, dat wil zeggen, de kleinste positieve g waarvoor een codewoord van gewicht g bestaat.
(iii) Bewijs dat de Hammingafstand een metriek definieert, dat wil zeggen, voor alle $u,v,w \in \mathbb{F}_q^n$ geldt:
   a) $h(v,w) \geq 0$; en $\quad [h(v,w)=0 \iff v=w]$;
   b) $h(v,w)=h(w,v)$;
   c) $h(u,v)+h(v,w) \geq h(u,w)$.

♠ **Huiswerk III-3. [Even gewicht code]**

(i) Laat zien dat de vectoren van even gewicht in $\mathbb{F}_2^n$ een code vormen.
(ii) Wat is de minimumafstand van de code uit (i)?
(iii) Vormen de even gewicht vectoren in $\mathbb{F}_3^n$ een code?

♠ **Huiswerk III-4. [Hamming codes]**

(i) Schrijf de parity-check matrix H_2 en de generatormatrix G_2 op. Waaraan is de binaire Hamming code met $r=2$ gelijk?
(ii) Laat zien dat de r kolommen van parity-check matrix H_r onafhankelijk zijn. Omdat de codewoorden rijvectoren v ter lengte 2^r-1 zijn die voldoen aan $v \cdot H_r = 0$ volgt dat de dimensie van de code 2^r-1-r is.
(iii) Een vector v uit $\mathbb{F}_2^7$ is een codewoord uit $\mathcal{C}_3$ wanneer geldt dat het product $v \cdot H_3$ precies de nulvector oplevert (in $\mathbb{F}_2^3$). Veronderstel nu dat v de som is van een codewoord c en de vector f_j met alleen op positie j een 1 en elders nullen. Wat is dan het product $v \cdot H_3$?
(iv) Gebruik het vorige onderdeel om te bepalen in welke coördinaat van de vector $(1,1,0,1,1,1,0)$ een fout geslopen is.
(v) Bewijs dat $\mathcal{C}_r$ altijd 1-foutverbeterend is.
(vi) Laat voor $r=2,3$ zien dat de Hammingcode precies de Hamming grens bereikt voor $e=1$, en bewijs dat tenslotte voor alle $r \geq 2$.