

---

## Huiswerkopgaven IV

---

♠ **Huiswerk IV-1.** Laat  $\psi$  op  $\mathbb{R}^3$  de lineaire afbeelding zijn die een vector  $v$  roteert over een vaste hoek  $\phi$  om de lijn door de oorsprong opgespannen door  $e_1 + e_2 + e_3$ , waar  $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$  een basis (bijvoorbeeld de standaardbasis) voor  $\mathbb{R}^3$  is.

- (i) Kies een handige nieuwe basis  $\mathcal{C}$  voor  $\mathbb{R}^3$  en geef de matrix  ${}^{\mathcal{C}}M_{\psi}^{\mathcal{C}}$  voor de afbeelding  $\psi$  ten opzichte van deze basis.
- (ii) Geef de matrices  ${}^{\mathcal{E}}M_{\text{id}}^{\mathcal{C}}$  en  ${}^{\mathcal{C}}M_{\text{id}}^{\mathcal{E}}$ .
- (iii) Geef de matrix  ${}^{\mathcal{E}}M_{\psi}^{\mathcal{E}}$  voor  $\psi$  ten opzichte van de oorspronkelijke basis  $\mathcal{E}$ .

♠ **Huiswerk IV-2.** Laat  $\phi$  de lineaire afbeelding van  $\mathbb{Q}^2$  naar  $\mathbb{Q}[x]^{(2)}$  zijn gedefinieerd door

$$\phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 2 - 3x + x^2, \quad \phi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 1 - x^2.$$

Hier is  $\mathbb{Q}[x]^{(2)}$  de vectorruimte van polynomen van graad ten hoogste 2 over  $\mathbb{Q}$ .

- (i) Bepaal het beeld van  $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  en van  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  voor willekeurige  $a, b \in \mathbb{Q}$ .
- (ii) Kies bases voor  $\mathbb{Q}^2$  en  $\mathbb{Q}[x]^{(2)}$  en geef de matrix van  $\phi$  ten opzichte hiervan.
- (iii) Geef een basis voor het beeld van  $\phi$  en een basis voor de kern van  $\phi$ .
- (iv) Is er een vector in  $\mathbb{Q}^2$  met beeld  $1 - x$ ? Zo ja, geef zo'n vector. Idem voor beeld  $-6 + 10x - 6x^2$ .

♠ **Huiswerk IV-3.**

- (i) Is de afbeelding  $c_1 : \mathbb{C}^1 \rightarrow \mathbb{C}^1$  die aan een complex getal  $z$  zijn complex geconjugeerde  $\bar{z}$  toevoegt een lineaire afbeelding? En is de afbeelding  $c_2$  van  $\mathbb{R}^2$  naar  $\mathbb{R}^2$  lineair, als  $c_2$  aan het paar  $(a, b)$  toevoegt het paar bestaande uit het reële en het imaginaire deel van de complex geconjugeerde van het complexe getal  $z$ , waar  $z$  zelf reëel deel  $a$  en imaginair deel  $b$  heeft?
- (ii) Bewijs: als  $f$  een injectieve lineaire afbeelding tussen  $L$ -vectorruimten  $V$  en  $W$  is, dan is het beeld van een eindig stelsel lineair onafhankelijke vectoren weer lineair onafhankelijk.
- (iii) Laat  $V = \mathbb{Q}[x]$  en  $W$  de lineaire deelruimte van  $\mathbb{Q}[x]$  bestaande uit  $\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \in \mathbb{Q}[x] : a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0\}$  (dus polynomen waarin geen oneven machten van  $x$  voorkomen). Is de afbeelding  $\phi : V \rightarrow W$  die gegeven wordt door  $\phi(c_0 + c_1x + \dots + c_kx^k) = c_0 + c_1x^2 + c_2x^4 + \dots + c_kx^{2k}$  een lineaire afbeelding? En is de afbeelding injectief? Surjectief?

♠ **Huiswerk IV-4. [ Differentiatie ]**

De afbeelding  $D$  van de vectorruimte  $\mathbb{R}[x]$  van polynomen met reële coëfficiënten naar zichzelf is gegeven door de gebruikelijke differentiatieregels, dus  $D(f(x)) = f'(x)$

- (i) Laat zien dat  $D$  een lineaire afbeelding is.
- (ii) Wanneer we  $D$  beperken tot de deelruimte  $\mathbb{R}[x]^{(n)}$  van polynomen van graad ten hoogste  $n$ , wat is dan het beeld en wat is de kern van  $D$ ? Geef ook de matrix  $\mathcal{M}_D$  ten opzichte van een basis voor  $\mathbb{R}[x]^{(n)}$ .
- (iii) Bestaat er een polynoom  $f \in \mathbb{R}[x]$  zodanig dat  $D(f) = f$ ?
- (iv) Je kunt  $D$  voortzetten tot lineaire afbeelding op de reële vectorruimte van *formele machtreeksen*  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$  (er mogen dus nu oneindig veel niet-nul termen zijn). Bepaal een formele machtreeks  $F$  met  $D(F) = F$ .