Huiswerkopgaven VI

♠ **Huiswerk VI-1.** Geef een voorbeeld van een lineaire transformatie zonder eigenvectoren.

♠ **Huiswerk VI-2.**

(i) Bepaal het karakteristieke polynoom voor de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

(ii) Bepaal de eigenwaarden van A over het lichaam $\mathbb{Q}$.

(iii) Bepaal bij elk van de eigenwaarden λ van A een basis voor de deelruimte van alle eigenvectoren bij de eigenwaarde λ, dus met $A \cdot v = \lambda \cdot v$.

(iv) Vat de matrix A nu op als een element van $\mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{F}_2)$ door de coëfficiënten te reduceren modulo 2. Herhaal de vragen voor de matrix $\bar{A}$ die je zo krijgt, met $\mathbb{Q}$ vervangen door $\mathbb{F}_2$.

♠ **Huiswerk VI-3.** Laat V de vectorruimte $\mathbb{Q}[x]^{(2)}$ van rationale polynomen van graad ten hoogste 2 zijn. Definieer de transformatie ϕ van V door $\phi(f(x)) = f(x)+xf'(x)+f'(x)$, waar $f(x)$ in V is en $f'(x)$ de afgeleide van f is.

(i) Kies een basis $\mathcal{B}$ voor V en bepaal $M_\phi^{\mathcal{B}}$.

(ii) Bepaal het karakteristieke polynoom van ϕ.

(iii) Bepaal alle eigenwaarden van ϕ.

(iv) Bepaal bij elke eigenwaarde λ van ϕ de eigenruimte E_λ.

(v) Bepaal C zodanig dat $C^{-1} \cdot M_\phi^{\mathcal{B}} \cdot C$ een diagonaalmatrix is.

♠ **Huiswerk VI-4.** Ontbind de volgende polynomen over de aangegeven lichamen in irreducibele factoren.

(i) $x^4 - 2$ over $\mathbb{Q}$, over $\mathbb{R}$ en over $\mathbb{C}$;

(ii) $x^8 - 1$ over $\mathbb{Q}$, over $\mathbb{R}$ en over $\mathbb{C}$;

(iii) $x^3 - 1$ over $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ (het lichaam met 5 elementen);

(iv) $x^5 - x$ over $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

♠ **Huiswerk VI-5.**

(i) Laat zien dat als f, g twee polynomen in $\mathbb{Z}[x]$ ongelijk aan nul zijn, dat $\deg f \cdot g = \deg f + \deg g$. Is dit ook waar als $f = 0$ of $g = 0$ (met $\deg 0 = -\infty$)?

(ii) Laat zien dat als f, g twee polynomen in $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})[x]$ zijn, niet hoeft te gelden dat $\deg f \cdot g = \deg f + \deg g$. En in $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[x]$?

(iii) Is het voor elke commutatieve ring R met 1 waar dat voor elk tweetal polynomen $f, g \in R[x]$ geldt dat $\deg(f + g) = \max(\deg f, \deg g)$?

(iv) Vind alle nulpunten uit $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ van het polynoom $x^2 + \overline{11} \in (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})[x]$.

(v) Laat zien dat er monische polynomen in $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})[x]$ zijn die op twee essentieel verschillende manieren als product van irreducibele polynomen te schrijven zijn.