Huiswerkopgaven VII

♠ **Huiswerk VII-1.** Laat T de lineaire transformatie van $\mathbb{Q}^4$ zijn bepaald door:

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b-c \\ a+c \\ a+d \end{pmatrix}.$$

Voor een vector $v \in V$ is T_v de deelruimte van $\mathbb{Q}^4$ opgespannen door $v, Tv, T^2v, \ldots$

(i) Bepaal de matrix M van T ten opzichte van de standaardbasis van $\mathbb{Q}^4$.
(ii) Bepaal de ruimte T_u als u de eerste standaardbasisvector e_1 is, door u, Tu, T^2u enzovoorts te bepalen totdat je een afhankelijkheid vindt van $T^k u$ met de voorgaande $T^i u$; bepaal ook het karakteristieke polynoom $p_{T|_{T_u}}$ beperkt tot T_u.
(iii) Doe hetzelfde als u de tweede basisvector e_2 is, en idem voor e_4.
(iv) Volgens Lemma 6.33 delen de gevonden polynomen $p_{T|_{T_u}}$ het karakteristieke polynoom p_T van T; bepaal hieruit p_T.
(v) Bepaal p_T ook op de gebruikelijke wijze direct.
(vi) Is T diagonaliseerbaar?

♠ **Huiswerk VII-2.** Laat

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & -6 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

(i) Gegeven is dat 2 en 4 de enige eigenwaarden van M zijn. Bepaal p_M.
(ii) Bepaal de dimensies van de eigenruimten voor M en de Jordan normaalvorm J.
(iii) Vind een matrix Q zodanig dat $Q^{-1} \cdot M \cdot Q = J$.

♠ **Huiswerk VII-3.** Vind de Jordan normaalvorm J voor de matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

over het lichaam met 5 elementen, en ook een matrix Q zodanig dat $Q^{-1} \cdot M \cdot Q = J$.

♠ **Huiswerk VII-4. [Toepassing: Markov keten]**
In een peiling heeft 25 van de 30 ondervraagde stadsbewoners aangegeven komend jaar in de stad te blijven, terwijl de overige 5 naar het platteland willen verhuizen. Van de 30 ondervraagde plattelandsbewoners heeft maar 1 aangegeven naar de stad te willen verhuizen in het komende jaar. Deze matrix vat dat samen: $P = \begin{pmatrix} \frac{25}{30} & \frac{1}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{29}{30} \end{pmatrix}$.

(i) Aangenomen dat de steekproeven helemaal representatief zijn en mensen doen wat ze zeggen te willen, hoeveel mensen wonen er dan na een jaar op het platteland en hoeveel in de stad als dat er aanvankelijk allebei 30 duizend zijn?
(ii) Aangenomen dat de voorkeuren niet veranderen in de loop der tijd, hoe is de verdeling dan na 2 jaar, en na 10? (Een formule volstaat!)
(iii) We willen, onder dezelfde aannamen, uitrekenen of, en zo ja, hoe, de bevolkingsverdeling stabiliseert: daartoe bepalen we de limiet P^∞ als volgt: laat zien dat P diagonaliseerbaar is, en bepaal een matrix Q zodanig dat $Q \cdot P \cdot Q^{-1} = D$ een diagonaalmatrix is. Laat zien dat D^∞ bestaat en bepaal daaruit P^∞.
(iv) Hoe zal (onder de gegeven aannamen) de verdeling van bewoners over stad en platteland uiteindelijk zijn? Hoe hangt dit af van de oorspronkelijke verdeling?