
Antwoorden X

♠ Uitwerking X-1.

- (i) Nee, want (bijvoorbeeld) $A((2, 0), (1, 0)) = 4 \neq 1+1 = A((1, 0), (1, 0)) + A((1, 0), (1, 0))$.
- (ii) Nee, want $1 = B((0, 0), (0, 0)) \neq B((0, 0), (0, 0)) + B((0, 0), (0, 0)) = 2$.
- (iii) Nee, want $3 = C((1, 0), (2, 2)) \neq 2C((1, 0), (1, 1)) = 2 \cdot 2$.
- (iv) Nee, want $4 = D((2, 2), (0, 0)) \neq 2D((1, 1), (0, 0)) = 2 \cdot 1$.
- (v) Ja, want $E((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = a_1 b_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.
- (vi) Ja, want $F((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

♠ Uitwerking X-2. $B(v, w) = 2v_1 w_1 - v_1 w_2 + v_2 w_1 - 3v_2 w_2$.

- (i) $M_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.
- (ii) $M_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$
- (iii) $B(c_1, c_1) = 2 - 1 + 1 - 3 = -1$, $B(c_1, c_2) = -2 - 1 - 1 - 3 = -7$, $B(c_2, c_1) = -2 + 1 + 1 - 3 = -3$, en $B(c_2, c_2) = 2 - 1 + 1 - 3 = -1$, dus je vindt dezelfde matrix (natuurlijk).

♠ Uitwerking X-3.

- (i) Uitschrijven:

$$(A \cdot B)^T = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$

en dat is ook precies

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = B^T \cdot A^T.$$

- (ii) Op positie i, j van $A \cdot B$ staat $A_{i*} \cdot B_{*j}$. Op positie j, i van $B^T \cdot A^T$ staat net zo $B^T_{j*} \cdot A^T_{*i}$. Maar $B^T_{j*} = B_{*j}^T$ want de j -de rij van de getransponeerde matrix is de tot rij getransponeerde van de j -de kolom; en net zo is $A^T_{*i} = A_{i*}^T$. Dus op positie j, i van $B^T \cdot A^T$ staat $B_{*j}^T \cdot A_{i*}^T$ (een rij keer een kolomvector) en dat is $B_{*j}^T \cdot A_{i*}^T = \sum_k B_{kj} \cdot A_{ik} = \sum_k A_{ik} \cdot B_{kj} = A_{i*} \cdot B_{*j}$. Op positie j, i van $B^T \cdot A^T$ staat hetzelfde element als op positie i, j van $A \cdot B$, hetgeen te bewijzen was.
- (iii) Transponeer de gelijkheid $A \cdot A^{-1} = I$ tot $(A^{-1})^T \cdot A^T = I^T = I$, dan is kennelijk $(A^{-1})^T$ de inverse van A^T , dat wil zeggen: $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.
- (iv) Een matrix M is symmetrisch wanneer $M^T = M$; bovendien is $(M+N)^T = M^T + N^T$ voor elke M, N . Dus $(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T$, dus $A + A^T$ symmetrisch.
- (v) $A \sim D$ (diagonaal) dan en slechts dan als er een inverteerbare T is met $T^T \cdot A \cdot T = D$. Dan

$$T^T \cdot A \cdot T = D = D^T = (T^T \cdot A \cdot T)^T = T^T \cdot A^T \cdot T$$

maar T^T en T zijn inverteerbaar dus $A = A^T$.

♠ Uitwerking X-4. Opgave 4 voor volgende keer.