

♠ **Uitwerking X-4.**

- (i) Volgens Stelling 9.10: maak eerst de symmetrische matrix bij Q . Dat wordt $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Pas nu het algoritme uit het bewijs toe:

Stap 2. Neem voor de vector v_1 de som van de basisvectoren $e_1 + e_2$.

Stap 3. $w = Mv_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^\top$, zodat de kern van $f(u) = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2$ wordt opgespannen door $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^\top$.

Stap 4. Dan is $T_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ en $T_1^\top M T_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

De diagonaalvorm is dus $Q(x, y) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}y^2$.

De methode van Voorbeeld 9.24 werkt aldus: $Q(x, y) = xy = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2$.

Dus de equivalente ‘standaard-diagonaal vorm’ met alleen 0, 1, -1 op de diagonaal is $x^2 - y^2$.

- (ii) Het geval $n_0 = 0, n_+ = 2, n_- = 0$ is gedaan in de opgave.

Het geval $n_0 = 2, n_+ = 0, n_- = 0$ hoort bij $Q(x, y) = 0x^2 + 0y^2$, en er zijn geen oplossingen voor $Q = 1$ of $Q = -1$, en alle x, y uit $\mathbb{R}^2$ zijn oplossing van $Q = 0$.

Het geval $n_0 = 0, n_+ = 0, n_- = 2$ hoort bij $Q(x, y) = -(x^2 + y^2)$, met positieve q_1, q_2 ; net als in het eerste geval krijgen we een ellips of cirkel ($Q = -1$) een punt ($Q = 0$) of de lege verzameling als oplossing.

Het geval $n_0 = 1, n_+ = 1, n_- = 0$ hoort bij $Q(x, y) = x^2$, en dat geeft twee verticale lijnen ($Q = 1$), een verticale lijn ($Q = 0$) of de lege verzameling.

Het geval $n_0 = 1, n_+ = 0, n_- = 1$ hoort bij $Q(x, y) = -x^2$, en dat geeft dezelfde oplossingen als net in een andere volgorde.

Het geval $n_0 = 0, n_+ = 1, n_- = 1$ hoort bij $Q(x, y) = x^2 - y^2$, en dat geeft als oplossingen een hyperbool (voor $Q = 1$ en voor $Q = -1$) en twee snijdende lijnen ($Q = 0$).