
Antwoorden XI

♠ **Uitwerking XI-1.** $B(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3) = a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + a_2b_3 + a_3b_1 + a_3b_2$, en $C(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3) = a_1b_1 + a_1b_2 - a_1b_3 + a_2b_1 + a_2b_3 - a_3b_1 + a_3b_2 - 3a_3b_3$.

- (i) Rechtstreeks (door te laten zien dat elke coëfficiënt bij $a_i b_j$ hetzelfde is als die bij $a_j b_i$, voor alle paren (i, j)), of door eerst de matrix uit (ii) te maken en te zien dat die symmetrisch is.

- (ii) In de Grammatrix van B staan de $B(e_i, e_j)$ op positie (i, j) , dus $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ voor B

en $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ voor C . (Merk op dat dit op twee manieren kan — door direct te zien dat de coëfficiënt van $a_i b_j$ op positie i, j in de matrix komt, of door $B(e_i, e_j)$ uit te rekenen. de Tweede methode bewijst de correctheid van de eerste.)

- (iii) Voor B' : in stap 1) neem je (bijvoorbeeld) $i = 1, j = 2$ dus $v_1 = e_1 + e_2$. Dan $w = (1, 1, 2)$ en de kern van $u_1 + u_2 + 2u_3 = 0$ wordt opgespannen door $(1, -1, 0)$ en $(2, 0, -1)$. Dus $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ en

$$T^T \cdot M \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Herhaal nu het algoritme op $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$: neem $i = j = 1$ en $v_1 = e_1$ zodat $w = Mv_1 = (-2, -2)$ en de kern wordt opgespannen door $(1, -1)$. Dat geeft

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dus B' heeft matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Voor C' : neem $i = j = 1$ en $v_1 = e_1$, dan $w = (1, 1, -1)$ en de kern van $u_1 + u_2 - u_3$ wordt opgespannen door $(1, -1, 0)$ en $(1, 0, 1)$. Dan

$$T^T \cdot M \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Op $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ losgelaten krijgen we

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dus C' heeft matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- (iv) Nee, want de invarianten zijn verschillend: $2 = n_-(B) \neq n_-(C) = 1$.

- (v) $Q_C = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 3x_3^2 + 2x_2x_3 = (x_1 + x_2 - x_3)^2 - x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2$, en dat is $(x_1 + x_2 - x_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2$ hetgeen gelijk is aan $y_1^2 - y_2^2$ als we $y_1 = x_1 + x_2 - x_3$, $y_2 = x_2 - 2x_3$ nemen.
- (vi) $Q_B = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ herschrijf je bijvoorbeeld door net als in onderdeel (iii) eerst de vector $(x_1, x_2, x_3)^T$ te vervangen door $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, waardoor je krijgt $Q_B = 2(t_1 + t_2 + 2t_3)(t_1 - t_2) + 2(t_1 + t_2 + 2t_3)(-t_3) + 2(t_1 - t_2)(-t_3)$ hetgeen vereenvoudigt tot $2t_1^2 - 2t_2^2 - 4t_3^2 - 4t_2t_3$ (vergelijk met de matrix uit onderdeel (iii)!). Daarna vervang je $-2t_2^2 - 4t_3^2 - 4t_2t_3$ door $-2(t_2 + t_3)^2 - 2t_3^2$.

♠ **Uitwerking XI-2. [Het meetkundige en het rekenkundige gemiddelde]**

- (i) $(2\sqrt{xy})^2 = 4xy \leq (x + y)^2$ omdat $(x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2 \geq 0$.

De ongelijkheid van Cauchy-Schwarz voor de vectoren $\begin{pmatrix} \sqrt{x} \\ \sqrt{y} \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} \sqrt{y} \\ \sqrt{x} \end{pmatrix}$ geeft (zie 6.3.9(iii)) dat $2\sqrt{x}\sqrt{y} \leq (x + y)(y + x)$.

- (ii) Stel $\sqrt[k]{x_1x_2 \cdots x_k} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k}$. Dan

$$\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_{2k}}{2k} = \frac{1}{k} \left(\frac{y_1 + y_2}{2} + \cdots + \frac{y_{2k-1} + y_{2k}}{2} \right) \geq \sqrt[k]{\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) \cdots \left(\frac{y_{2k-1} + y_{2k}}{2}\right)}$$

en dat is weer groter of gelijk $\sqrt[k]{\sqrt{y_1y_2} \cdots \sqrt{y_{2k-1}y_{2k}}}$, vanwege (i), k keer toegepast. Dat geeft het resultaat direct.

- (iii) Weer gegeven:

$$\sqrt[k]{x_1x_2 \cdots x_k} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k}.$$

Het gevraagde

$$\sqrt[k-1]{x_1x_2 \cdots x_{k-1}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1}}{k-1},$$

is equivalent met

$$x_1x_2 \cdots x_{k-1} \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1}}{k-1}\right)^{k-1},$$

en dus met

$$x_1x_2 \cdots x_{k-1} \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1}}{k-1}\right) \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1}}{k-1}\right)^k,$$

wat weer equivalent is met

$$\sqrt[k]{x_1x_2 \cdots x_{k-1} \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1}}{k-1}\right)} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1}}{k-1},$$

maar de rechterkant hier is gelijk aan

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1}}{k-1}\right)}{k},$$

en dan volgt het resultaat uit de gegeven ongelijkheid in het speciale geval dat $x_k = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1}}{k-1}$.

- (iv) Laat de rechthoek zijden x_1 en x_2 hebben; dan is de omtrek $2(x_1 + x_2)$ en de oppervlakte x_1x_2 . Volgens (i) is $x_1x_2 \leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 = 5^2$, en voor het vierkant geldt hier gelijkheid.
- (v) Het ligt hier voor de hand de ongelijkheid van rekenkundig en meetkundig gemiddelde voor $k = 3$ te gebruiken; de truc is echter om er een kleine twist aan te geven: laten de zijden x, y, z zijn, dan is de oppervlakte $O = 2(xy + xz + yz)$ en de inhoud natuurlijk $V = xyz$. Neem nu niet $x_1 = x, x_2 = y$ en $x_3 = z$, maar $x_1 = xy, x_2 = xz$ en $x_3 = yz$, dan is $\sqrt[3]{x_1x_2x_3} = \sqrt[3]{(xyz)^2} = \sqrt[3]{V^2}$ kleiner dan of gelijk aan $\frac{xy + xz + yz}{3} = \frac{1}{6}O$, oftewel $O \geq 6\sqrt[3]{V^2} = 24$, in dit geval. Maar voor de kubus met zijde 2 is O juist $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$, en dus minimaal.