Antwoorden XII

♠ **Uitwerking XII-1.**

(i) Laat $w \in W \cap W^{\perp}$; dan per definitie $< u, v >= 0$ als $u \in W$ en $v \in W^{\perp}$. Neem nu $u = v = w$, dan $< w, w >= 0$. Dus $w = 0$.

(ii) Laat $v_1, \ldots, v_n$ een orthogonaal stelsel van niet-nul vectoren zijn. Veronderstel dat $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$. Dan is voor $i = 1, \ldots, n$: $0 =< 0, v_i >=< v, v_i >= \lambda_i < v_i, v_i >$ dus $\lambda_i = 0$, maar dan is $v_1, \ldots, v_n$ lineair onafhankelijk.

♠ **Uitwerking XII-2.**

(i) Laten v en w orthogonale vectoren zijn; dan is

$$||v + w||^2 =< v + w, v + w >=< v, v > +2 < v, w > + < w, w >= ||v||^2 + ||w||^2.$$

(ii) Voor alle v en w geldt

$$||v + w||^2 + ||v - w||^2 =< v + w, v + w > + < v - w, v - w >= 2||v||^2 + 2||w||^2.$$

♠ **Uitwerking XII-3.**

(i) $< f, g >= \int_0^1 xe^x \mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}e^x = xe^x|_0^1 - \int_0^1 e^x \mathrm{d}x = e - (e - 1) = 1,$
$||f||^2 =< f, f >= \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3|_0^1 = \frac{1}{3}$ dus $||f|| = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$||g||^2 =< g, g >= \int_0^1 e^{2x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x}|_0^1 = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$
$||f+g||^2 =< f+g, f+g >= \int_0^1 (x+e^x)^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2+2xe^x+e^{2x} \mathrm{d}x = \frac{1}{3}+2\cdot 1+\frac{1}{2}(e^2-1)$

(ii) Aan de Cauchy-Schwarz ongelijkheid wordt voldaan: $1 \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (\frac{1}{2}(e^2 - 1) \approx 1.844$
Aan de driehoeksongelijheid wordt voldaan omdat $2 < f, g >= 2 \cdot 1 > 0$.

♠ **Uitwerking XII-4.** Voor $m, n \in \mathbb{Z}$ is $\int_0^{2\pi} e^{imx} e^{-inx} \mathrm{d}x$ en als $m \neq n$ is dat gelijk aan $\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} \mathrm{d}x = \frac{1}{i(m-n)} e^{i(m-n)x}|_0^{2\pi}$. Voor $m = n$ wordt de integraal: $\int_0^{2\pi} 1|_0^{2\pi} = 2\pi$. Dus $< e^{imx}, e^{inx} >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imx} e^{-inx} \mathrm{d}x = \delta_{mn}$.

♠ **Uitwerking XII-5. [Legendre polynomen]**

(i) We orthogonaliseren het stelsel: $w_1 = v_1 = 1$, en $||w_1||^2 == \int_{-1}^1 1\mathrm{d}x = x|_{-1}^1 = 2$. Dan is $< x, w_1 >= \int_{-1}^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2|_{-1}^1 = 0$ en $w_2 = v_2 - 0 = x$. Omdat $< x^2, w_1 >= \int_{-1}^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3|_{-1}^1 = \frac{2}{3}$ en $< x^2, w_2 >= \int_{-1}^1 x^3 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4||_{-1}^1 = 0$ zien we dat $w_3 = v_3 - \frac{2}{3}\frac{w_1}{2} - 0 = x^2 - \frac{1}{3}$. Normaliseren geeft dan $w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ en $w_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}x$ omdat $||w_2||^2 = \int_{-1}^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{3}$ en $w_3 = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1)$ omdat $||w_3||^2 = \int_{-1}^1 (x^2 - \frac{1}{3})^2 \mathrm{d}x = (x^5/5 - 2x^3/9 + x/9)|_{-1}^1 = \frac{4}{45} - \frac{-4}{45} = \frac{8}{45}$. De eerste drie *Legendre polynomen* zijn dan ook:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x, \quad \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3x^2 - 1).$$

(ii) Om het polynoom $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ op de orthonormale basis uit onderdeel (i) te schrijven hoeven we volgens Propositie 10.15 slechts de $< f, w_i >$ te berekenen:

$$< f, w_1 >= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2}}(3x^2 + 2x + 1) = 2\sqrt{2},$$

$$< f, w_2 >= \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x(3x^2 + 2x + 1) = \frac{2}{3}\sqrt{6},$$

$$< f, w_3 >= \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3x^2 - 1)(3x^2 + 2x + 1) = \frac{2}{5}\sqrt{10},$$

en is $f(x) = 2\sqrt{2}w_1 + \frac{2}{3}\sqrt{6}w_2 + \frac{2}{5}\sqrt{10}w_3$.

(iii) $||f||^2 = (2\sqrt{2})^2 + (+\frac{2}{3}\sqrt{6})^2 + (\frac{2}{5}\sqrt{10})^2 = 8 + 8/3 + 8/5 = 184/15$, dus $||f|| = 2\frac{\sqrt{46}}{\sqrt{15}}$.

(iv) Voor de projectie van $g(x) = x^3$ op $V^{(2)}$ berekenen we $< g, w_1 >= 0 =< g, w_3 >$ en

$$< g, w_2 >= \int_{-1}^{1} x^3 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} x \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{6}}{5},$$

dus de projectie van g op $V^{(2)}$ is $v = \frac{\sqrt{6}}{5}w_2 = \frac{3}{5}x$.

(v) Volgens Stelling 10.17 is nu $g = v + z$ met $v \in V^{(2)}$ de projectie van g; dan moet $z = g - v = x^3 - \frac{3}{5}x$.