

Antwoorden XIII

♠ **Uitwerking XIII-1.** We gebruiken voortdurend dat $\bar{\bar{z}} = z$.

- (i) $H(v, w_1 + w_2) = \overline{H(w_1 + w_2, v)} = \overline{H(w_1, v) + H(w_2, v)} = \overline{H(w_1, v)} + \overline{H(w_2, v)} = H(v, w_1) + H(v, w_2)$ en $H(v, \lambda w_1) = \overline{H(\lambda w_1, v)} = \overline{\lambda \cdot H(w_1, v)} = \overline{\lambda} \cdot H(v, w_1)$.
- (ii) Voor het complexe standaardinproduct geldt $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v_1 \bar{w}_1 + v_2 \bar{w}_2 + \dots + v_n \bar{w}_n$. Een complexe $n \times n$ matrix M is unitair dan en slechts dan als $M^T \cdot M = I_n$, en dat is dan en slechts dan het geval als voor de kolomvectoren $\vec{v}$ en $\vec{w} \neq \vec{v}$ geldt dat $\vec{v}^T \cdot \vec{v} = 1$, en $\vec{v}^T \cdot \vec{w} = 0$. Maar $\vec{v}^T \cdot \vec{w} = \bar{v}_1 w_1 + \bar{v}_2 w_2 + \dots + \bar{v}_n w_n = \overline{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}$ en net zo $\vec{v}^T \cdot \vec{v} = \overline{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$, dus M is unitair dan en slechts dan als $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 1$ en $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$, hetgeen precies het geval is wanneer $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 1$ en $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$: de kolommen vormen een orthogonaal stelsel met betrekking tot het standaardinproduct.
- (iii)

$$\begin{aligned} (M + N)^T &= \begin{pmatrix} M_{11} + N_{11} & M_{12} + N_{12} & \cdots & N_{1n} + N_{1n} \\ M_{21} + N_{21} & M_{22} + N_{22} & \cdots & N_{2n} + N_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} + N_{n1} & M_{n2} + N_{n2} & \cdots & N_{nn} + N_{nn} \end{pmatrix}^T = \\ &= \begin{pmatrix} M_{11} + N_{11} & M_{12} + N_{12} & \cdots & N_{n1} + N_{n1} \\ M_{21} + N_{21} & M_{22} + N_{22} & \cdots & N_{n2} + N_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{1n} + N_{1n} & M_{2n} + N_{2n} & \cdots & N_{nn} + N_{nn} \end{pmatrix} = M^T + N^T. \end{aligned}$$

Op positie i, j van de matrix $(M \cdot N)^T$ staat hetzelfde als op positie j, i van $M \cdot N$ en dat is het product van de j -de rij van M en de i -de kolom van N . In coördinaten is dat $\sum_{k=1}^n M_{jk} N_{ki}$. Op positie i, j van $N^T M^T$ staat het product van de i -de rij van N^T en de j -de kolom van M^T , dat wil zeggen het product van de i -de kolom van N (als rijvector opgevat) en de j -de rij van M , als kolom opgevat. In coördinaten is dat $\sum_{k=1}^n N_{ki} M_{jk} = \sum_{k=1}^n M_{jk} N_{ki}$.

- (iv) Om te laten zien dat niet noodzakelijk $M \cdot N$ Hermitees is, is het voldoende Hermitees M, N te vinden zodat $M \cdot N$ het niet is: we weten dat dan $\overline{M \cdot N}^T = \overline{N}^T \overline{M}^T = N \cdot M$ dus als we maar 2 niet-commuterende Hermitees matrices nemen zal dit ongelijk zijn aan $M \cdot N$. Kies dus bijvoorbeeld $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dan

$$\overline{M \cdot N}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ maar } M \cdot N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ daaraan niet gelijk.}$$

Wel is $\overline{(M \cdot N + N \cdot M)}^T = (\bar{M} \cdot \bar{N} + \bar{N} \cdot \bar{M})^T = (\bar{M} \cdot \bar{N})^T + (\bar{N} \cdot \bar{M})^T$ volgens (iii), en ook volgens (iii) is dat weer gelijk aan $\bar{N}^T \cdot \bar{M}^T + \bar{M}^T \cdot \bar{N}^T = N \cdot M + M \cdot N = M \cdot N + N \cdot M$, omdat M, N Hermitees zijn en matrixoptelling commutatief is.

♠ **Uitwerking XIII-2.**

- (i) Een $n \times n$ reële matrix is orthogonaal dan en slechts dan als $Q^T \cdot Q = I_n$; dus is Q inverteerbaar, en is Q^T de unieke inverse Q^{-1} van Q . Maar dan is eveneens $Q \cdot Q^T = Q \cdot Q^{-1} = I_n$ en dus vormen de rijen van Q een orthonormaal stelsel.
- (ii) $1 = \det I_n = \det Q \cdot Q^T = \det Q \cdot \det Q$ omdat $\det Q = \det Q^T$, dus $(\det Q)^2 = 1$.
- (iii) Kies een orthonormale basis en laat $\vec{v}$ de coördinatenvector van een eigenvector voor Q met eigenwaarde λ zijn, zodat $Q \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$; dan is $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \vec{v}^T \cdot \vec{v} = \vec{v}^T I_n \vec{v} = \vec{v}^T Q^T Q \vec{v} = (\vec{v}^T)^T \cdot Q \vec{v} = \lambda \vec{v}^T \cdot \lambda \vec{v} = \lambda^2 \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$. Omdat $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \neq 0$ volgt dat $\lambda^2 = 1$.
- (iv) Bijvoorbeeld $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, of elke andere 2×2 matrix als in de eerste vorm van opgave 3(iii) met $y \neq 0$.

- (v) Als Q orthogonaal is, dan is $Q^T = Q^{-1}$ dus $(Q^{-1})^T = Q$ en daarom $(Q^{-1})^T \cdot Q^{-1} = Q \cdot Q^{-1} = I_n$, dat wil zeggen: Q^{-1} is orthogonaal. Als Q, R orthogonaal zijn, dan is $(Q \cdot R)^T \cdot (Q \cdot R) = R^T \cdot Q^T \cdot Q \cdot R = R^T \cdot R = I_n$, dus $Q \cdot R$ is ook orthogonaal.

♠ **Uitwerking XIII-3.**

- (i) Omdat $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als beeld $\begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$ heeft en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als beeld $\begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}$, wordt de matrix $\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$.
- (ii) De spiegellijn wordt gegeven door de vergelijking $-\sin \phi \cdot x + \cos \phi \cdot y = 0$. Als we het spiegelbeeld van $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ willen bepalen, zien we dat dit beeld $\vec{v} - 2\vec{w}$ is, waar $\vec{w}$ de loodrechte projectie van $\vec{v}$ op de normaal van de lijn, opgespannen door $\begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}$, is. Dat betekent dat $\vec{w} = \left\langle \vec{v}, \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}$. Dat geeft voor de spiegeling S :

$$S\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 - 2v_1 \sin^2 \phi + 2v_2 \sin \phi \cos \phi \\ v_2 + 2v_1 \sin \phi \cos \phi - 2v_2 \cos^2 \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\sin^2 \phi & 2\sin \phi \cos \phi \\ 2\sin \phi \cos \phi & 1 - 2\cos^2 \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

en dat is

$$\begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

- (iii) Laat $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ orthogonaal zijn; dan moet M inverteerbaar zijn, dus $\Delta = xw - yz \neq 0$, en bovendien moet

$$\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = M^T = M^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} w & -y \\ -z & x \end{pmatrix},$$

dus $x \cdot \Delta = w$, $z \cdot \Delta = -y$, $y \cdot \Delta = -z$ en $w \cdot \Delta = x$. De laatste in de eerste van de vier vergelijkingen invullen geeft $(\Delta^2 - 1)w = 0$, en de derde in de tweede geeft $(\Delta^2 - 1)y = 0$. Omdat w en y niet beide nul mogen zijn, volgt $\Delta = \pm 1$. Als $\Delta = 1$

dan is $x = w$ en $y = -z$ en de matrix wordt $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ met $x^2 + y^2 = 1$, en als

$\Delta = -1$ dan volgen $x = -w$ en $y = z$, zodat $M = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}$ met $-x^2 - y^2 = -1$.

- (iv) Uit (iii) zien we dat de orthogonale M ofwel determinant 1 heeft, en dan een draaiing over een hoek $-\phi$ geeft (volgens (i)), waar $x = \cos \phi$, ofwel determinant -1 , en dan is M volgens (ii) gelijk aan spiegeling in een lijn met hoek ϕ waar $x = \cos 2\phi$.
- (v) Omdat

$$\begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\phi & -\sin 2\phi \\ \sin 2\phi & \cos 2\phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

is de spiegeling in de lijn met hoek ϕ de samenstelling van een spiegeling (in de x -as) en een draaiing, over een hoek 2ϕ .