Antwoorden XIV

♠ **Uitwerking XIV-1.** We zoeken een matrix M met $M^{\mathsf{T}}M = MM^{\mathsf{T}}$. Maar M moet niet symmetrisch zijn omdat symmetrische matrices te diagonaliseren zijn; kies dus bijvoorbeeld een niet-symmetrsiche orthogonale matrix (want dan is $M^{\mathsf{T}} = M^{-1}$), zoals

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

♠ **Uitwerking XIV-2.** Dit is een voorbeeld van een orthogonale en symmetrische afbeelding waarvan de matrix er niet orthogonaal of symmetrisch uitziet omdat deze gegeven is ten opzichte van een niet-orthonormale basis!

E'en manier om orhtogonaliteit en symmetrie aan te tonen is door naar de definities te kijken; veel makkelijker is het hier om over te gaan op een orthonormale basis. Pas Gram-Schmidt toe op de basis $\mathcal{B}$ en je krijgt de standaardbasis. De transformatie van $\mathcal{B}$ naar $\mathcal{E}$ wordt gegeven door

$${}^{\mathcal{E}}M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

met als inverse

$${}^{\mathcal{B}}M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & -2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

en dus

$$M_T^{\mathcal{E}} = {}^{\mathcal{E}}M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{B}} \cdot M_T^{\mathcal{B}} \cdot {}^{\mathcal{B}}M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{E}} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & -2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

een matrix die duidelijk orthogonaal en symmetrisch is.

♠ **Uitwerking XIV-3.** Het zoeken ven een oplossing voor

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 11 \\ 1 & 6 & -4 \\ 11 & -4 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ 19 \end{pmatrix} = b$$

is makkelijk: je vindt $(1, -2, 0)^{\mathsf{T}}$. Dan wordt $w = A^*v = (-1, 4, -3)^{\mathsf{T}}$. Inderdaad is $A \cdot w = b$. Elke ander oplossing scheelt met w een element van de kern van A. Vegen geeft dat de kern wordt voortgebracht door $(1, -1/5, -3/5)^{\mathsf{T}}$, dus elke oplossing van $A \cdot x = b$ is van de vorm $w' = w + \lambda \cdot (1, -1/5, -3/5)^{\mathsf{T}}$, voor een reële λ. Maar de lengte van zo'n oplossing is

$$\|w'\| = \| \begin{pmatrix} -1+\lambda \\ 4 - \frac{\lambda}{5} \\ -3 - \frac{3}{5} \end{pmatrix} \| = 26 + \frac{35}{25}\lambda^2$$

en dat is minimaal als $\lambda = 0$, dus als $x = w$.

Het aardige is natuurlijk dat dit algemeen werkt.

♠ **Uitwerking XIV-4.**

(i) Veronderstel dat voor alle $x, y \in V$ geldt dat $< Sx, y >= 0$; laat x een vector zijn met $Sx \neq 0$. Dan is $< Sx, Sx >\neq 0$ (want positief), tegenspraak. Dus zo'n x bestaat helemaal niet: $S = 0$.

(ii) Als voor alle $x, y \in V$ geldt dat $< Sx, y >=< Tx, y >$, dan is $< (S - T)x, y >= 0$ voor alle x, y, dus vanwege (i) is $S - t = 0$, dus $S = T$. Merk op dat dit net zo geldt als $< x, Sy >=< x, Ty >$ voor alle x, y.

(iii) Veronderstel nu dat $K = \mathbb{C}$ en dat S en T Hermites zijn. Dan is $S \cdot T$ Hermites is dan en slechts dan als $< S \cdot Tx, y >=< x, S \cdot Ty >$ voor alle x, y. Maar ook

$$< S \cdot Tx, y >=< Tx, Sy >=< x, T \cdot Sy >$$

voor alle x, y omdat S en T Hermites zijn, dus $S \cdot T$ is Hermites dan en slechts dan als $< x, T \cdot Sy >=< x, S \cdot Ty >$ voor alle x, y. Het resultaat volgt uit (ii).

♠ **Uitwerking XIV-5.**

(i) M is normaal, opgevat als complexe matrix, dan en slechts dan als $M \cdot M^* = M^* \cdot M$. Maar $M^* = \bar{M}^\top = M^\top$ omdat M reëel is.

(ii) Als M orthogonaal is, dan is $M^\top = M^{-1}$, dus $M \cdot M^\top = I = M^\top \cdot M$. Als M symmetrisch is, dan is $M \cdot M^\top = M \cdot M = M^\top \cdot M$.

(iii) Deze opgave was fout geformuleerd! Het woord normaal had hier door symmetrisch vervangen moeten zijn ... als in het bewijs van Stelling 12.15: als M symmetrisch is dan is er een orthonormale basis van eigenvectoren, die de orthogonale transformatiematrix geven. Als $M = O^{-1}DO$ met O orthogonaal, dan is $O^\top = O^{-1}$ dus

$$M^* = (O^{-1}DO)^* = O^\top D^\top {O^{-1}}^\top = O^{-1}DO = M$$

dus zeker M symmetrisch.