Antwoorden VIII

♠ **Uitwerking VIII-1.** Laat V de vectorruimte $\mathbb{Q}^3$ zijn en $W = \mathbb{Q}^2$.

(i) Gebruik dat $b_i^* b_j = 0$ als $i \neq j$ en 1 als $i = j$, en dat b_i^* lineair is, zodat

$$b_1^* \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b_1^* \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - b_1^* \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - 0 = 1,$$

en

$$b_1^* \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(b_1^* \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - b_1^* \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - b_1^* \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \frac{1}{2}(0 - 1 - 0) = -\frac{1}{2},$$

en

$$b_1^* \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Dus $b_1^* \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x - \frac{1}{2}y$. Net zo $b_2^* \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}y$, en $b_3^* \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -x + z$.

(ii) $c_1^* \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{7} c_1^* \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{7} c_1^* \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{7}$ en $c_1^* \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} c_1^* \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{7} c_1^* \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}$,
$c_2^* \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{7} c_2^* \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{7} c_2^* \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7}$, en $c_2^* \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} c_2^* \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{7} c_2^* \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{2}{7}$.
Dus $c_1^* \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3}{7}x + \frac{1}{7}y$ en $c_2^* \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{7}x + \frac{2}{7}y$.

(iii) Omdat $f(b_1) = f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -c_1$ en $f(b_2) = f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = 2c_2$ en $f(b_3) = f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = c_1 + c_2$ krijgen we

$${}^{\mathcal{C}}M_f^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Het is erg instructief om na te rekenen in een voorbeeld dat dit goed is, bijvoorbeeld door de matrix met $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ te vermenigvuldigen en te laten zien dat het klopt!

(iv) $f^\mathsf{T}(c_1^*)b_1 = (c_1^* \circ f)b_1 = c_1^* f(b_1) = c_1^*(-c_1) = -1$ en $f^\mathsf{T}(c_1^*)b_2 = (c_1^* \circ f)b_2 = c_1^* f(b_2) = c_1^*(2c_2) = 0$ en $f^\mathsf{T}(c_1^*)b_3 = (c_1^* \circ f)b_3 = c_1^* f(b_3) = c_1^*(c_1 + c_2) = 1$; $f^\mathsf{T}(c_2^*)b_1 = (c_2^* \circ f)b_1 = c_2^* f(b_1) = c_2^*(-c_1) = 0$ en $f^\mathsf{T}(c_2^*)b_2 = (c_2^* \circ f)b_2 = c_2^* f(b_2) = c_2^*(2c_2) = 2$ en $f^\mathsf{T}(c_3^*)b_3 = (c_2^* \circ f)b_3 = c_2^* f(b_3) = c_2^*(c_1 + c_2) = 1$.

(v) Dus ${}^{\mathcal{B}^*}M_{f^\mathsf{T}}^{\mathcal{C}^*} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ten opzichte van de de bases $\mathcal{C}^*$ en $\mathcal{B}^*$. Dat is precies de getransponeerde van ${}^{\mathcal{C}}M_f^{\mathcal{B}}$.

♠ **Uitwerking VIII-2.** Laat V de reële 3-dimensionale vectorruimte $\mathbb{R}^3$ zijn en laat U een vlak door de oorsprong zijn. Steeds is $v + U = \{v + u : u \in U\}$.

(i) Als $v_1 - v_2 = u \in U$ dan is $v_1 + U = (v_2 + u) + U = v_2 + U$; omgekeerd, als $v_1 + U = v_2 + U$ dan moet $v_1 + 0$ ook in $v_2 + U$ zitten (want 0 zit in elke lineaire deelruimte), dus is er een u in U met $v_1 + 0 = v_2 + u$, zodat $v_1 - v_2 = u \in U$.

(ii) Als $(v_1 + U) \cap (v_2 + U) \neq \emptyset$ dan zit er een vector in, zeg w. Dan zijn er u en u' in U met $v_1 + u = w = v_2 + u'$, dus $v_1 - v_2 = u' - u \in U$ omdat U lineaire deelruimte is. Volgens (i) is dan $v_1 + U = v_2 + U$. Dus $(v_1 + U) \cap (v_2 + U)$ is leeg of $v_1 + U = v_2 + U$.

(iii) Per definitie: $(w+U)+(v_1+U) = (w+v_1)+U$ en $(w+U)+(v_2+U) = (w+v_2)+U$. Als nu $v_1+U = v_2+U$ dan volgens (i) is $v_1-v_2 \in U$, maar dan ook $(w+v_1)-(w+v_2) \in U$, zodat opnieuw volgens (i) geldt dat $(w + v_1) + U = (w + v_2) + U$.

(iv) (i) is niet waar, (ii) wel, en (iii) ook: een vlak U dat niet door de oorsprong gaat is te schrijven als $U = t + T$ met t een niet-nul vector en T een vlak dat wel door de oorsprong gaat. Nu is $v_1+U = v_2+U$ dan en slechts dan als $v_1+t+T = v_2+t+T$, en volgens (i) op T toegepast geldt dat dan en slechts dan als $(v_1+t)-(v_2+t) = v_1-v_2$ in T zit — niet in U! De bewijzen uit (ii) en (iii) kunnen net zo aangepast worden door T ipv U te gebruiken; meetkundig gezien geldt (ii) nog steeds omdat twee evenwijdige vlakken samenvallen of disjunct zijn.

(v) Ja, we hebben nergens gebruikt dat de dimensie 3 is, of het lichaam $\mathbb{R}$.

♠ **Uitwerking VIII-3.** [**Uitwendig product** en **normaalvergelijking**]
Laat een vlak V in $\mathbb{R}^3$ gegeven zijn door de vectorvergelijking $\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{q} + \mu\vec{r}$, voor onafhankelijke vectoren $\vec{q}$ en $\vec{r}$ in $\mathbb{R}^3$, met $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Met $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ geven we het standaardinproduct van $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ aan.

(i) $\langle \vec{n}, \vec{x} - \vec{p} \rangle = \langle \vec{n}, \lambda\vec{q} + \mu\vec{r} \rangle = \lambda\langle \vec{n}, \vec{q} \rangle + \mu\langle \vec{n}, \vec{r} \rangle = 0$.

(ii) $\langle \vec{n}, \vec{q} \rangle \neq 0$ is in tegenspraak met $\vec{x} = \vec{p} + \vec{q}$ in V en dus $0 = \langle \vec{n}, \vec{x} - \vec{p} \rangle = \langle \vec{n}, \vec{q} \rangle$. Net zo voor $\vec{r}$.

(iii) $\langle \vec{q}, \begin{pmatrix} q_2r_3 - q_3r_2 \\ -q_1r_3 + q_3r_1 \\ q_1r_2 - q_2r_1 \end{pmatrix} \rangle = q_1q_2r_3 - q_1q_3r_2 - q_2q_1r_3 + q_2q_3r_1 + q_3q_1r_2 - q_3q_2r_1 = 0$, en idem voor $\vec{r}$.

(iv) Voor alle $\vec{x}$ met eindpunt in V:

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & q_1 & r_1 \\ x_2 & q_2 & r_2 \\ x_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ x_3 - p_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_2r_3 - q_3r_2 \\ -q_1r_3 + q_3r_1 \\ q_1r_2 - q_2r_1 \end{pmatrix} \rangle,$$

en dat is 0 volgens het vorige onderdeel.

(v) Neem voor $\vec{p}$ één van de gegeven vectoren, en voor $\vec{q}$ en $\vec{r}$ twee verschillen; dus bijvoorbeeld $\vec{p} = \vec{a}$, $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$ en $\vec{r} = \vec{a} - \vec{c}$:

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & -1 & 0 \\ x_2 & 3 & 1 \\ x_3 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 0,$$

geeft de normaalvergelijking $4x_1 + 2x_2 - x_3 = (4 - 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1)) = 5$. Vul ter controle de drie punten in!