

Hoofdstuk 10

Inproductruimten

We herhalen eerst de definitie van een reële inproductruimte.

Definities 10.1 Een *inproduct* op een reële vectorruimte V is een symmetrische bilineaire vorm B op V waarvan de bijbehorende kwadratische vorm Q *positief definitief* is op V , dat wil zeggen, voor alle $0 \neq v \in V$ geldt $Q(v) = B(v, v) > 0$. We geven zo'n inproduct meestal aan met $\langle v, w \rangle$ in plaats van $B(v, w)$. De ruimte V voorzien van een inproduct heet een *reële inproductruimte*.

In een inproductruimte V is de *lengte* of *norm* $\|v\|$ van een $v \in V$ gedefinieerd door $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

De *afstand* $d(v, w)$ tussen twee vectoren $v, w \in V$ is per definitie de lengte van de verschilvector: $d(v, w) = \|v - w\|$.

Opmerkingen 10.2 In een algemene L -vectorruimte kun je niet over *positief definitief* spreken; het is dan ook niet zo duidelijk hoe het lengtebegrip te generaliseren naar L -vectorruimten (maar we zullen dat straks wel doen voor complexe vectorruimten). Omdat deellichamen van $\mathbb{R}$ (zoals bijvoorbeeld $\mathbb{Q}$) de ordening van $\mathbb{R}$ erven, kunnen we op vectorruimten over zulke lichamen wel eenvoudig dezelfde begrippen definiëren.

Voorbeelden 10.3 (i) Het *standaardinproduct* op $\mathbb{R}^n$ wordt gedefinieerd door $\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n$; de lengte van $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ is dan

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}.$$

Voor $n = 1$ is die lengte dus de absolute waarde: $\|v\| = |v|$. De ruimte $\mathbb{R}^n$ voorzien van het standaardinproduct wordt wel de *n-dimensionale Euclidische vectorruimte* genoemd.

- (ii) Bij elke symmetrische $n \times n$ reële matrix M geeft $(v, w) \mapsto v^T M w$ een symmetrische bilineaire vorm, en dat is een inproduct op $\mathbb{R}^n$ mits $v^T M v$ positief definitief is. In het vorige hoofdstuk zagen we dat we M konden diagonaliseren en de afbeelding is een inproduct als de diagonaalvorm uitsluitend positieve elementen op de diagonaal heeft. Omgekeerd kunnen we bij elk inproduct op $\mathbb{R}^n$ zo'n matrix vinden. Het standaardinproduct uit het vorige onderdeel is het speciale geval $M = I_n$.
- (iii) Dit voorbeeld kwamen we ook al in **Lineaire Algebra 2** tegen: De verzameling van reëelwaardige, continue functies $C([0, 1])$ op het interval $[0, 1]$ vormt

een vectorruimte onder de gebruikelijke optelling van functies en vermenigvuldiging met scalaren. We kunnen deze tot een inproductruimte maken door

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

als inproduct te nemen.

- (iv) Op de vectorruimte $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ van reële $n \times n$ matrices (onder optelling) kunnen we een inproduct definiëren door $\langle M, N \rangle = \text{Tr}(N^T M)$.

Vervolgens definiëren we complexe inproductruimten. Het is niet meer goed om naar bilineaire vormen te kijken, omdat de waarden van $B(v, v)$ niet altijd reëel zijn (en dan geen zinnige ‘lengte’ geven). In plaats daarvan moeten we naar Hermite-se vormen kijken.

Definitie 10.4 Een *Hermite-se vorm* op een complexe vectorruimte V is een afbeelding $H : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ die voldoet aan:

- (1) voor elke $w \in V$ is de afbeelding $H_w : V \rightarrow \mathbb{C}$, gedefinieerd door $H_w(v) = H(v, w)$, een $\mathbb{C}$ -lineaire afbeelding; en
- (2) voor elke $v, w \in V$ geldt $H(v, w) = \overline{H(w, v)}$, de complex geconjugeerde van $H(w, v)$.

Gevolg 10.5 Een *Hermite-se* H voldoet aan $H(v, w_1 + w_2) = H(v, w_1) + H(v, w_2)$, maar $H(v, \lambda w) = \bar{\lambda}H(v, w)$.

Opmerkingen 10.6 Omdat een Hermite-se H per definitie lineair in het eerste argument is, noemt men vanwege de eigenschap uit het Gevolg H wel sesquilineair (‘anderhalf lineair’). Merk ook op dat een Hermite-se H wél bilineair is op een reële (deel)vectorruimte, en dat $H(v, v) \in \mathbb{R}$ voor elke $v \in V$.

Definitie 10.7 Een *complex inproduct* is een positief definitie Hermite-se vorm H op een complexe vectorruimte V , dus $H(v, v) > 0$ voor $v \in V$. Een paar bestaande uit V met een complex inproduct heet een *complexe inproductruimte*.

Voorbeelden 10.8

- (i) Het *standaardinproduct* op $\mathbb{C}^n$ is $\langle v, w \rangle = v_1 \bar{w}_1 + \dots + v_n \bar{w}_n$; de lengte van $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ is dan

$$\|v\| = \sqrt{v_1 \bar{v}_1 + v_2 \bar{v}_2 + \dots + v_n \bar{v}_n} = \sqrt{|v_1|^2 + \dots + |v_n|^2},$$

als we met $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ de modulus van een complex getal aangeven. Voor $n = 1$ is de lengte dus gewoon de modulus: $\|v\| = |v|$.

- (ii) De verzameling van *complexwaardige*, continue functies op het interval $[0, 2\pi]$ vormt een vectorruimte onder de gebruikelijke optelling van functies en vermenigvuldiging met scalaren. We kunnen deze tot een inproductruimte maken door

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

als inproduct te nemen.

- (iii) Op de vectorruimte $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ van complexe $n \times n$ matrices (onder optelling) kunnen we een inproduct definiëren door $\langle M, N \rangle = \text{Tr}(N^* M)$, waar $N^* = \overline{N^T}$ de *complex-geconjugeerde getransponeerde* van N is (die soms ook wel ge-adjungeerde wordt genoemd).

Definitie 10.9 Een $n \times n$ matrix M over de complexe getallen heet een *Hermitesese matrix* als geldt dat $M^* = \overline{M}^T = M$.

Stelling 10.10 Laat $c_1, c_2, \dots, c_n$ een basis voor $\mathbb{C}^n$ zijn. Er bestaat een bijectie tussen de verzameling van inproducten op $\mathbb{C}^n$ en de verzameling $n \times n$ Hermitesese matrices waarvoor de bijbehorende reëel kwadratische vorm $v^T M \overline{w}$ positief definitief is.

Bewijs. Als $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een inproduct op $\mathbb{C}^n$ is, definiëren we $M_{ij} = \langle c_i, c_j \rangle$. Dat is een Hermitesese matrix omdat $\langle c_i, c_j \rangle = \overline{\langle c_j, c_i \rangle}$. Omgekeerd voegen we aan een Hermitesese M een afbeelding op $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ toe door middel van $(v, w) \mapsto v^T M \overline{w}$; het is eenvoudig in te zien dat dit een Hermitesese vorm geeft. Ook is niet moeilijk te zien dat deze injectieve afbeeldingen elkaars inverse zijn.

Stelling 10.11 Zij V een inproductruimte over het lichaam L der reële of complexe getallen. Dan:

- (i) voor elke $v \in V$ en $\lambda \in L$ geldt: $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$;
- (ii) $\|v\| \geq 0$; en bovendien geldt: $\|v\| = 0 \iff v = 0$;
- (iii) voor elke $v, w \in V$ geldt: $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$;
- (iv) voor elke $v, w \in V$ geldt: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Bewijs. Bewering (i) volgt onmiddellijk uit

$$\sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} = \sqrt{\lambda \overline{\lambda} \langle v, v \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

In het bijzonder is $\langle 0, 0 \rangle = 0$, en omdat vanwege het positief definitief zijn van $\langle v, v \rangle$ geldt $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} > 0$ tenzij $\langle v, v \rangle = 0$, volgt (ii).

Als $w = 0$ geldt ongelijkheid (iii) triviaal; neem nu aan $w \neq 0$. Dan is voor $\lambda \in L$ de volgende uitdrukking niet-negatief:

$$\|v - \lambda w\|^2 = \langle v - \lambda w, v - \lambda w \rangle = \langle v, v \rangle - \overline{\lambda} \langle v, w \rangle - \lambda \langle w, v \rangle + \lambda \overline{\lambda} \langle w, w \rangle.$$

Met de speciale keuze:

$$\lambda = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle}$$

levert dat het niet-negatief zijn van

$$\langle v, v \rangle - \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\langle w, w \rangle} = \|v\|^2 - \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\|w\|^2}$$

en dan volgt (iii).

Gebruik nu (iii) om te zien dat:

$$\|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w \rangle = \|v\|^2 + \langle v, w \rangle + \overline{\langle v, w \rangle} + \|w\|^2$$

en dat is ten hoogste $\|v\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2$ hetgeen gelijk is aan $(\|v\| + \|w\|)^2$.

Opmerkingen 10.12 De ongelijkheden in 10.11(iii) en (iv) staan bekend als de *Cauchy-Schwarz ongelijkheid* en de *driehoeksongelijkheid*; voor het reële geval zagen we deze al in **Lineaire Algebra 2**.

Orthogonaliteit en projectie

Definities 10.13 De *hoek* tussen niet-nul vectoren v, w in een *reële* inproductruimte V is de hoek ϕ waarvoor de cosinusregel geldt:

$$\cos \phi = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

Merk op dat de hoek tussen vectoren zo niet eenduidig bepaald is: veelvouden van 2π doen er niet toe, en ook is er keuze tussen ϕ en $-\phi$ met dezelfde waarde van de cosinus. Soms legt men de hoek eenduidig vast door een representantensysteem modulo π te kiezen.

Definities 10.14 Twee vectoren v, w in een inproductruimte *staan loodrecht op elkaar* (genoteerd als $v \perp w$) als hun inproduct 0 is: $\langle v, w \rangle = 0$. We zeggen ook wel dat v en w *orthogonaal* zijn; algemener is een stelsel van vectoren $v_1, v_2, \dots, v_n$ *orthogonaal* als elk tweetal het is, dus $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ voor $i \neq j$. Het stelsel heet *orthonormaal* als het orthogonaal is en elk vector lengte 1 heeft: $\|v_i\| = 1$. Merk op dat wanneer de vectoren $v_1, \dots, v_k$ een orthogonaal stelsel van niet-nul vectoren vormen, de vectoren $v_1/\|v_1\|, \dots, v_k/\|v_k\|$ een orthonormaal stelsel vormen; we zeggen wel dat we de vectoren v_i zo *genormaliseerd* hebben.

Een bondige manier om een orthonormaal stelsel te karakteriseren is door het Kroneckersymbool, $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$.

Als W een lineaire deelruimte is van een inproductruimte V geven we met $W^\perp$ de lineaire deelruimte aan van vectoren die orthogonaal zijn met alle vectoren van W . Als verzameling is dus $W^\perp = \{v \in V \mid \forall w \in W \langle v, w \rangle = 0\}$. $W^\perp$ heet wel het *orthogonaal complement* of ook *orthoplement* van W .

Propositie 10.15 Als $v_1, v_2, \dots, v_n$ een orthogonaal stelsel van niet-nul vectoren in een inproductruimte V vormen, en y zit in het opspansel van $v_1, v_2, \dots, v_n$, dan is

$$y = \sum_{i=1}^n \frac{\langle y, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \cdot v_i.$$

Bewijs. Omdat y in het opspansel zit, bestaan er coëfficiënten λ_i uit het lichaam ($\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$) zodat $y = \sum_i \lambda_i v_i$. Vanwege lineariteit van het inproduct en orthogonaliteit is $\langle y, v_i \rangle = \lambda_i \langle v_i, v_i \rangle$, en het resultaat volgt direct uit $\langle v_i, v_i \rangle = \|v_i\|^2$.

Definitie 10.16 Laat W een lineaire deelruimte van de inproductruimte V zijn, en $v \in V$. Als $w_1, \dots, w_k$ een orthogonale basis voor W vormt heet $\sum_{i=1}^k \frac{\langle v, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i$ de (orthogonale) projectie van v op W .

Stelling 10.17 In elke inproductruimte V met een lineaire deelruimte W die een orthogonale basis $w_1, w_2, \dots, w_k$ heeft, is elke vector $v \in V$ op unieke wijze te schrijven als $v = w + z$ met $w \in W$ en $z \in W^\perp$. Bovendien is w dan de projectie van v op W .

Bewijs. Kies w gelijk aan de projectie van v op W ; dan is $w \in W$, en de vector $z = v - w$ voldoet aan

$$\langle z, w_i \rangle = \langle v - w, w_i \rangle = \langle v, w_i \rangle - \sum_{j=1}^k \frac{\langle v, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} \langle w_j, w_i \rangle = 0.$$

Dus is z orthogonaal met elke vector uit W en ligt daarom in $W^\perp$.

Als ook $v = w' + z'$ met $w' \in W$ en $z' \in W^\perp$, dan is $w - w' = z' - z \in W \cap W^\perp = \{0\}$, dus $w = w'$ en $z = z'$.

Stelling 10.18 *Laat V een inproductruimte zijn en $v_1, v_2, \dots, v_k$ een onafhankelijke verzameling vectoren uit V . Dan geldt voor de vectoren w_j , gedefinieerd door $w_1 = v_1$ en voor $2 \leq j \leq k$ door*

$$w_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle v_j, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i$$

dat $w_1, w_2, \dots, w_k$ een orthogonaal stelsel is, en het opspansel $\langle w_1, \dots, w_i \rangle$ is gelijk aan het opspansel $\langle v_1, \dots, v_i \rangle$ voor $i = 1, 2, \dots, k$.

Bewijs. Met inductie: $k = 1$ is triviaal, en als $w_1, \dots, w_{j-1}$ orthogonaal zijn is

$$\langle w_j, w_i \rangle = \langle v_j, w_i \rangle - \sum_{h=1}^{j-1} \frac{\langle v_j, w_h \rangle}{\|w_h\|^2} \langle w_h, w_i \rangle = 0$$

voor $i < j$, en dus is ook $w_1, \dots, w_j$ een orthogonaal stelsel.

Gevolg 10.19 *Elke eindig-dimensionale inproductruimte heeft een orthogonale basis, en zelfs een orthonormale basis.*

Bewijs. De eerste bewering volgt direct uit de voorgaande stelling door met een basis van V te beginnen. De tweede volgt dan omdat het normaliseren van de orthogonale basis een orthonormale basis geeft.

Opmerking 10.20 De methode uit 10.18 om in een inproductruimte een orthogonale, of zelfs orthonormale basis te maken heet de *Gram-Schmidt* orthogonalisatie procedure, en zagen we al eerder in **Lineaire Algebra 2**.

We grijpen nu terug op Propositie 10.15. Als het orthogonale stelsel daar orthogonaal is, laat y zich heel eenvoudig als lineaire combinatie van de v_i schrijven, namelijk met coëfficiënten $\langle y, v_i \rangle$.

Definitie 10.21 Laat $B = b_1, b_2, \dots$ een (mogelijk oneindige) orthonormale deelverzameling van een inproductruimte V zijn. Voor een vector $y \in V$ noemen we de elementen $\langle y, b_i \rangle$ de *Fouriercoëfficiënten* voor y met betrekking tot B .

Voorbeeld 10.22 Het bekendste voorbeeld van Fouriercoëfficiënten vinden we in de inproductruimte van continue, complexwaardige functies op $[0, 2\pi]$ met inproduct $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$, als in Voorbeeld 10.8(ii). Als oneindige orthonormale verzameling kunnen we de exponentiële functies $f_n(x) = e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$, voor gehele getallen n , nemen. De Fouriercoëfficiënten $\langle f, f_n \rangle$ geven het complexwaardige equivalent van het benaderen van functies op een interval door sommen van sinussen.