Hoofdstuk 11

Unitaire en Hermitese transformaties

We beschouwen vervolgens lineaire transformaties van reële en complexe inproductruimten die aan extra eigenschappen voldoen die betrekking hebben op het verband tussen transformatie en inproduct. Het zal blijken dat we daarmee ook eigenschappen kunnen afleiden voor zulke transformaties die met diagonaliseerbaarheid samenhangen. Steeds zullen we een begrip voor reële inproductruimten en een corresponderend begrip voor complexe inproductruimten invoeren, en bovendien begrippen die op de bijbehorende matrices slaan. We moeten ook sterker dan voorheen onderscheid maken tussen eindig- en oneindig-dimensionale vectorruimten.

Orthogonale Transformaties

Het eerste paar begrippen zal blijken die transformaties te karakteriseren die zowel lengten als hoeken behouden.

Definitie 11.1 Een lineaire afbeelding $T : V \to W$ tussen reële inproductruimten heet een *isometrie* als geldt dat

$$< Tv_1, Tv_2 > = < v_1, v_2 > \quad \text{voor alle } v_1, v_2 \in V.$$

Als T bovendien inverteerbaar is, dan heet T *orthogonaal.*

Stelling 11.2 *Zij $T : V \to W$ een lineaire afbeelding tussen reële inproductruimten met $\dim V = \dim W$ eindig; dan geldt:*

$$T \text{ is een isometrie} \quad \Longleftrightarrow \quad T \text{ is orthogonaal.}$$

Bewijs. De ene implicatie ($\Leftarrow$) is duidelijk; voor de andere moeten we bewijzen dat een isometrie T tussen eindig-dimensionale vectorruimten inverteerbaar is. Omdat $\dim V = \dim W = n < \infty$ volstaat het injectiviteit van T te bewijzen, dat wil zeggen, te laten zien dat $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. Veronderstel maar dat $Tv = 0$; omdat $< v, v > = < Tv, Tv > = 0$ moet $v = 0$.

Definities 11.3 We zeggen dat een lineaire afbeelding $T : V \to W$ tussen reële inproductruimten *lengten behoudt* als geldt $||Tv|| = ||v||$ voor alle $v \in V$; we zeggen dat T *hoeken behoudt* als voor elk tweetal v_1, v_2 geldt dat de hoek tussen Tv_1 en Tv_2 gelijk is aan de hoek tussen v_1 en v_2.

Stelling 11.4 *Een lineaire afbeelding $T : V \to W$ tussen reële inproductruimten behoudt lengten en hoeken dan en slechts dan als T een isometrie is.*

Bewijs. Dit volgt direkt uit de definities van lengte, hoek, en isometrie.

Definitie 11.5 Een matrix $M \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ heet *orthogonaal* wanneer $M^\mathsf{T} M = I_n$.

Omdat op positie i, j van $M^\mathsf{T} M$ precies $< v_j, v_i >$ staat, waar v_i de i-de kolom van M is, zegt deze definitie dus dat van een orthogonale M de kolommen een orthonormaal stelsel vormen. De volgende stelling laat zien dat het dubbele gebruik van de term 'orthogonaal' geen misverstand is.

Stelling 11.6 *Zij T een lineaire transformatie van de n-dimensionale reële inproductruimte V. Dan zijn equivalent:*

(i) *voor alle $v_1, v_2 \in V$ geldt: $< Tv_1, Tv_2 >=< v_1, v_2 >$;*

(ii) *de transformatie T is orthogonaal;*

(iii) *er is een orthonormale basis $\mathcal{E}$ voor V zodat $M_T^\mathcal{E}$ een orthogonale matrix is;*

(iv) *de matrix $M = M_T^\mathcal{B}$ is orthogonaal, dus $(M_T^\mathcal{B})^\mathsf{T} \cdot M_T^\mathcal{B} = I_n$, voor elke orthonormale basis $\mathcal{B}$ van V;*

(v) *T voert orthonormale bases voor V over in orthonormale bases.*

Bewijs. De equivalentie van (i) en (ii) in het eindig-dimensionale geval zagen we al in Stelling 11.2.

Voor een basis $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ van V is $< Tb_i, Tb_j >$ het inproduct van twee kolommen van $M_T^\mathcal{B}$. Als T orthogonaal is en $\mathcal{B}$ is orthonormaal, dan is het stelsel $(Tb_1, \ldots, Tb_n)$ ook weer orthonormaal, dat wil zeggen, $M_T^\mathcal{B}$ is een orthogonale matrix. Dus (ii) impliceert (iv).

De kolommen van $M_T^\mathcal{B}$ vormen de beelden van $b_1, \ldots, b_n$ onder T; als deze kolommen een orthonormaal stelsel vormen wanneer dat voor $\mathcal{B}$ geldt, voert T kennelijk elke orthonormale basis $\mathcal{B}$ over in een orthonormale basis $T\mathcal{B}$. Dus uit (iv) volgt (v).

Als $\mathcal{B}$ een orthonormale basis voor V is, dan is

$$< v, w >=< \sum_{i=1}^n v_i b_i, \sum_{j=1}^n w_j b_j >= \sum_{i,j=1}^n v_i w_j < b_i, b_j >= \sum_{i=1}^n v_i w_i.$$

Als (v) geldt, dan is ook $T\mathcal{B} = \{Tb_1, \ldots, Tb_n\}$ een orthonormaal stelsel, en

$$< Tv, Tw >=< \sum_{i=1}^n v_i Tb_i, \sum_{j=1}^n w_j Tb_j >= \sum_{i,j=1}^n v_i w_j < Tb_i, Tb_j >= \sum_{i=1}^n v_i w_i,$$

dat wil zeggen: (i) geldt.

Omdat het duidelijk is dat (iv) ook (iii) impliceert, hoeven we tenslotte nog slechts te laten zien dat uit (iii) ook weer (ii) volgt. Zij $\mathcal{E}$ daartoe een orthonormale basis waarvoor $M_T^\mathcal{E}$ orthogonaal is; dan is $T\mathcal{E}$ dus een orthonormaal stelsel, en volgt voor elk tweetal $v, w \in V$ door ze op basis $\mathcal{E}$ te schrijven dat:

$$< Tv, Tw >=< T\sum_{i=1}^n v_i e_i, T\sum_{j=1}^n w_j e_j >= \sum_{i,j=1}^n v_i w_j < Te_i, Te_j >= \sum_{i=1}^n v_i w_i,$$

net als

$$< v, w >=< \sum_{i=1}^n v_i e_i, \sum_{j=1}^n w_j e_j >= \sum_{i=1}^n v_i w_i.$$

Unitaire Transformaties

Het complexe analogon van de orthogonale afbeelding is de unitaire afbeelding; de naam wordt duidelijk uit de eerstvolgende stelling.

Definitie 11.7 Een lineaire afbeelding $T : V \to W$ tussen complexe inproductruimten heet een *unitaire* afbeelding als T inverteerbaar is en

$$< Tv_1, Tv_2 >=< v_1, v_2 > \quad \text{voor alle } v_1, v_2 \in V.$$

Stelling 11.8 *Als λ eigenwaarde van een unitaire transformatie is, geldt:* $|\lambda| = 1$.

Bewijs. Laat λ eigenwaarde zijn van de unitaire T, bij eigenvector v. Dan is

$$< v, v >=< Tv, Tv >=< \lambda v, \lambda v >= \lambda\overline{\lambda} < v, v >,$$

dus $(1 - \lambda\overline{\lambda}) < v, v >= 0$. Omdat $v \neq 0$ is $< v, v >\neq 0$ en dus $|\lambda| = 1$.

Definitie 11.9 *Een matrix $M \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ heet unitair wanneer $\overline{M}^{\mathsf{T}} M = I_n$; met de notatie uit het vorige hoofdstuk: $M^* \cdot M = I_n$.*

Stelling 11.10 *Zij T een lineaire transformatie van de n-dimensionale complexe inproductruimte V. Dan zijn equivalent:*

(i) *voor alle $v_1, v_2 \in V$ geldt: $< Tv_1, Tv_2 >=< v_1, v_2 >$;*
(ii) *de transformatie T is unitair;*
(iii) *er is een orthonormale basis $\mathcal{E}$ voor V zodat $M_T^{\mathcal{E}}$ een unitaire matrix is;*
(iv) *de matrix $M_T^{\mathcal{B}}$ is unitair, dus $(M_T^{\mathcal{B}})^* \cdot M_T^{\mathcal{B}} = I_n$, voor elke orthonormale basis $\mathcal{B}$ van V;*
(v) *T voert orthonormale bases voor V over in orthonormale bases.*

Bewijs. Geheel analoog aan 11.6.

De volgende stelling laat zien dat unitaire afbeeldingen altijd diagonaliseerbaar zijn.

Stelling 11.11 *Zij T een unitaire lineaire transformatie van een eindig-dimensionale complexe inproductruimte V. Dan heeft V een orthonormale basis bestaande uit eigenvectoren voor T.*

Bewijs. Met inductie naar de dimensie n van V.

Als $n = 1$ is er niets te bewijzen.

Veronderstel dat $n \geq 2$; kies een eigenvector w voor T (dat kan altijd omdat we over de complexe getallen werken!). Die kunnen we normaliseren (tot lengte 1) door eventueel door de lengte te delen. Laat W nu de 1-dimensionale deelruimte van V opgespannen door w zijn. Omdat w eigenvector is en T inverteerbaar, is $T[W] = W$. Beschouw ook $W^\perp$; dan is $T[W^\perp] \subset T[W]^\perp$, want als $u \in W^\perp$ dan $< Tu, Tw >=< u, w >= 0$, en dus $Tu \in T[W]^\perp$. Maar $V = W \oplus W^\perp$ (dit volgt bijvoorbeeld uit Gram-Schmidt orthogonalisatie), zodat $V = T[V] = T[W] \oplus T[W]^\perp = W \oplus T[W]^\perp$ zodat T beperkt tot $W^\perp$ een transformatie van een $n - 1$-dimensionale deelruimte is, waarvoor de unitaire eigenschap natuurlijk nog steeds geldt. De orthonormale basis van $W^\perp$ bestaande uit eigenvectoren voor (de beperking van) T, die op grond van de inductiehypothese dan bestaat, kan met de genormaliseerde van w aangevuld worden tot zo'n basis voor heel V.

Symmetrische Transformaties

De volgende begrippen hebben bepaalde symmetrie-eigenschappen ten aanzien van beide argumenten in een inproduct.

Definitie 11.12 Een lineaire transformatie $T : V \to V$ van een reële inproductruimte heet een *symmetrische* transformatie als geldt dat

$$< Tv_1, v_2 >=< v_1, Tv_2 > \quad \text{voor alle } v_1, v_2 \in V.$$

Stelling 11.13 *Zij T een lineaire transformatie van de n-dimensionale reële inproductruimte V. Dan zijn equivalent:*

(i) *de afbeelding T is symmetrisch;*

(ii) *er is een orthonormale basis $\mathcal{E}$ voor V zodat $M_T^{\mathcal{E}}$ symmetrisch is;*

(iii) *de matrix $M_T^{\mathcal{B}}$ is symmetrisch, dus $(M_T^{\mathcal{B}})^\mathsf{T} = M_T^{\mathcal{B}}$, voor elke orthonormale basis $\mathcal{B}$ van V.*

Bewijs. Laat $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ een orthonormale basis van V zijn, en laat M de matrix van de transformatie T zijn ten opzichte van $\mathcal{B}$. Dan is de i-de kolom van M gelijk aan Tb_i, en (zie 10.15) de j-de coëfficiënt van die vector is $< Tb_i, b_j >$, dus $M_{ji} =< Tb_i, b_j >$. Net zo is $M_{ij} =< Tb_j, b_i >$. Als T symmetrisch is, dan is

$$M_{ij} =< Tb_j, b_i >=< b_j, Tb_i >=< Tb_i, b_j >= M_{ji},$$

voor elke i, j. Dus de matrix M is symmetrisch. Daarom volgt (iii) uit (i).

Het is duidelijk dat (ii) uit (iii) volgt.

Als (ii) geldt voor de orthonormale basis $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ van V, dan is

$$< Tv, w >=< \sum_{i=1}^n v_i Te_i, \sum_{j=1}^n w_j e_j >= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i w_j < Te_i, e_j >= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i w_j M_{ji},$$

voor elke v, w, als M de matrix $M_T^{\mathcal{E}}$ is; en net zo

$$< v, Tw >=< \sum_{i=1}^n v_i e_i, \sum_{j=1}^n w_j Te_j >= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i w_j < e_i, Te_j >= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i w_j M_{ij}.$$

Beide inproducten zijn dus gelijk als $M = M_T^{\mathcal{E}}$ een symmetrische matrix is, en dan is T een symmetrische transformatie. Dus (i) volgt uit (ii).

Hermitese Transformaties

Het complexe analogon van de symmetrische afbeelding is de Hermitese afbeelding.

Definitie 11.14 Een lineaire transformatie $T : V \to V$ van een complexe inproductruimte heet een *Hermitese* transformatie als geldt dat

$$< Tv_1, v_2 >=< v_1, Tv_2 > \quad \text{voor alle } v_1, v_2 \in V.$$

Stelling 11.15 *Voor elke eigenwaarde λ van een Hermitese afbeelding op een complexe vectorruimte geldt: $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Bewijs. Laat λ eigenwaarde zijn van de Hermitese T, bij eigenvector v. Dan is

$$\lambda < v, v >=< \lambda v, v >=< Tv, v >=< v, Tv >=< v, \lambda v >= \overline{\lambda} < v, v >,$$

dus $(\lambda - \overline{\lambda}) < v, v >= 0$. Omdat $v \neq 0$ is is $\lambda = \overline{\lambda}$.

In het vorige hoofdstuk noemden we een matrix $M \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ al *Hermites* wanneer $M^* = \overline{M}^{\mathsf{T}} = M$. Dat was geen toeval.

Stelling 11.16 *Zij T een lineaire transformatie van de n-dimensionale complexe inproductruimte V. Dan zijn equivalent:*

(i) *de afbeelding T is Hermites;*
(ii) *er is een orthonormale basis $\mathcal{E}$ zodat $M_T^{\mathcal{E}}$ Hermites is;*
(iii) *de matrix $M_T^{\mathcal{B}}$ is Hermites, dus $(M_T^{\mathcal{B}})^* = M_T^{\mathcal{B}}$, voor elke orthonormale basis $\mathcal{B}$ van V;*

Bewijs. Geheel analoog aan 11.13.

Ook Hermitese afbeeldingen blijken weer diagonaliseerbaar te zijn.

Stelling 11.17 *Zij T een Hermitese lineaire transformatie van een eindig-dimensionale complexe inproductruimte V. Dan heeft V een orthonormale basis bestaande uit eigenvectoren voor T.*

Bewijs. Het bewijs is vrijwel gelijk aan dat van 11.11, en gaat met inductie naar $n = \dim V$.

Als $n = 1$ is er niets te bewijzen.

Voor $n \geq 2$ kiest men weer een eigenvector w voor T, en laat W de 1-dimensionale deelruimte van V opgespannen door w zijn. Wederom is $T[W] \subset W$ en $T[W^\perp] \subset W^\perp$; dat laatste omdat voor $u \in W^\perp$ en voor alle $y \in W$ nu geldt dat $0 =< u, Ty >=< Tu, y >$, dus $Tu \in W^\perp$. Vanwege $V = W \oplus W^\perp$ en de inductiehypothese volgt de bewering.

In dit geval geldt een zelfde conclusie voor het reële geval.

Gevolg 11.18 *Zij T een symmetrische lineaire transformatie van een eindig-dimensionale reële inproductruimte V. Dan heeft V een orthonormale basis bestaande uit eigenvectoren voor T.*

Bewijs. Kies een orthonormale basis $\mathcal{B}$ voor V, dan is $M_T^{\mathcal{B}}$ een reëel symmetrische matrix, die ook een transformatie $\hat{T}$ op $\mathbb{C}^n$ (met $n = \dim V$) definieert. Bovendien is $\hat{T}$ Hermites, zodat $\hat{T}$ een eigenvector w heeft met eigenwaarde $\lambda \in \mathbb{R}$ volgens 11.15. Het reële (of het imaginaire) deel van w is dan een reële eigenvector van $\hat{T}$, en dus van T. Maar dat betekent dat bij elke symmetrische T een *reële* eigenvector gevonden kan worden, en dus kan het bewijs met inductie net zo uitgevoerd worden als van stelling 11.17.