# Hoofdstuk 12

# Geadjungeerde en normaliteit

In het vorige hoofdstuk werd bewezen dat het voor het bestaan van een orthonormale basis bestaande uit eigenvectoren voldoende is dat $T$ Hermites is (11.17) of dat $T$ unitair is (11.11). In deze paragraaf onderzoeken we een *noodzakelijke* voorwaarde voor $T$ voor het bestaan van zo'n basis.

## De geadjungeerde

**Stelling 12.1** *Zij $V$ een eindig-dimensionale complexe inproductruimte, en laat $U\colon V \to \mathbb{C}$ een lineaire afbeelding zijn. Dan bestaat er een uniek bepaalde vector $y \in V$ zodat voor alle $x \in V$ geldt: $U(x) =< x, y >$.*

**Bewijs.** Kies een orthonormale basis $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, dan is $y = \sum_{i=1}^{n} \overline{U(e_i)} \cdot e_i$ de gevraagde vector. Definieer namelijk $S(x) =< x, y >$, voor alle $x \in V$, dan is $S$ lineair (omdat het inproduct lineair in het eerste argument is), en er geldt:

$$S(e_j) =< e_j, y >=< e_j, \sum_{i=1}^{n} \overline{U(e_i)} \cdot e_i >= \sum_{i=1}^{n} \overline{\overline{U(e_i)}} \cdot < e_j, e_i >= U(e_j).$$

Dus $S = U$. Dat bewijst het bestaan van $y$.

Om te laten zien dat $y$ uniek is, veronderstel je dat ook $U(x) =< x, y' >$ voor zekere $y'$ en voor alle $x$; met $U(x) =< x, y >$ volgt dan dat $< x, y - y' >= 0$ voor elke $x$. Kiezen we $x = e_i$ dan volgt dat de $i$-de coefficient van $y - y'$ ten opzichte van de basis $\mathcal{E}$ gelijk 0 moet zijn. Omdat dit voor elke $i$ geldt is $y - y' = 0$, dus $y = y'$.

**Stelling 12.2** *Zij $V$ een eindig-dimensionale complexe inproductruimte, en laat $T\colon V \to V$ een lineaire transformatie zijn. Dan bestaat er een unieke lineaire transformatie $T^*\colon V \to V$ zodat voor elke $x, y \in V$:*

$$< Tx, y >=< x, T^* y > .$$

**Bewijs.** Kies $y \in V$. Definieer de afbeelding $U\colon V \to \mathbb{C}$ door $U(x) =< Tx, y >$, voor alle $x \in V$. Dan is $U$ lineair omdat $T$ en het inproduct het zijn:

$$U(x_1 + x_2) =< T(x_1 + x_2), y >=< Tx_1 + Tx_2, y >=< Tx_1, y > + < Tx_2, y >$$

hetgeen gelijk is aan $U(x_1) + U(x_2)$, en

$$U(\lambda x) =< T(\lambda x), y >=< \lambda Tx, y >= \lambda < Tx, y >= \lambda U(x).$$

Volgens de voorgaande stelling is er dus een vector $z \in V$ zodat $U(x) =< x, z >$ voor alle $x \in V$. Definieer nu $T^*: V \to V$ door $T^*y = z$, dan geldt zeker

$$< Tx, y >= U(x) =< x, z >=< x, T^*y >$$

voor alle $x, y \in V$. Bovendien is $T^*$ lineair, want

$$< x, T^*(y_1+y_2) >=< Tx, y_1+y_2 >=< Tx, y_1 > + < Tx, y_2 >=< x, T^*y_1+T^*y_2 >,$$

en

$$< x, T^*(\lambda y) >=< Tx, \lambda y >= \bar{\lambda} < Tx, y >= \bar{\lambda} < x, T^*y >=< x, \lambda T^*y > .$$

Tenslotte is $T^*$ uniek bepaald, want veronderstel dat er een lineaire transformatie $R$ is zodat $< Tx, y >=< x, Ry >$ voor alle $x, y \in V$. Dan is $< x, T^*y >=< x, Ry >$ voor alle $x, y$, dus $< x, (T^* - R)y >= 0$. Dan moet $(T^* - R)y = 0$, voor alle $y \in V$, dus $T^* = R$.

**Definitie 12.3** De unieke $T^*$ bij een lineaire transformatie $T$ wordt de *geadjungeerde* van $T$ genoemd.

Deze geadjungeerde heeft dus de eigenschap dat altijd $< Tx, y >=< x, T^*y >$. Maar we weten dat voor het inproduct ook geldt dat

$$< x, Ty >= \overline{< Ty, x >} = \overline{< y, T^*x >} =< T^*x, y >,$$

met andere woorden: mits men adjungeert mag de transformatie $T$ binnen het inproduct van argument wisselen!

**Stelling 12.4** *Zij $V$ een eindig-dimensionale complexe inproductruimte, en laten $T$ en $U$ lineaire transformaties van $V$ zijn. Dan:*

(i) $(T + U)^* = T^* + U^*$;
(ii) $(\lambda T)^* = \bar{\lambda}T^*$;
(iii) $(TU)^* = U^*T^*$;
(iv) $T^{**} = T$.

Het bewijs van 12.4 bestaat uit eenvoudige verificatie. Maar het volgt ook direkt uit de eigenschappen van matrices (zie beneden).

Voor *matrices* $A$ hadden we al eerder de notatie $A^*$ ingevoerd, zie 10.8, en wel om de complex-geconjugeerde getransponeerde van $A$ aan te geven: $A^* = \bar{A}^{\mathsf{T}}$. We laten nu zien dat dit niet een ongelukkige keuze van notatie is: ten opzichte van een orthonormale basis is de matrix van de geadjungeerde van $T$ inderdaad de geconjugeerd-getransponeerde van de matrix van $T$.

**Stelling 12.5** *Zij $V$ een eindig-dimensionale complexe inproductruimte met orthonormale basis $\mathcal{E}$, en laat $T: V \to V$ een lineaire transformatie zijn. Dan geldt:*

$$M_{T^*}^{\mathcal{E}} = (M_T^{\mathcal{E}})^*.$$

**Bewijs.** Laat $A = M_T^{\mathcal{E}}$ de matrix van $T$ ten opzichte van $\mathcal{E}$ zijn, en $B = M_{T^*}^{\mathcal{E}}$ die van $T^*$. Dan

$$B_{ij} =< T^*e_j, e_i >= \overline{< e_i, T^*e_j >} = \overline{< Te_i, e_j >} = \bar{A}_{ji},$$

zodat $B = \bar{A}^{\mathsf{T}}$.

**Propositie 12.6** *Laten $A$ en $B$ element van $\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ zijn. Dan geldt:*

(i) $(A+B)^* = A^* + B^*$;
(ii) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$;
(iii) $(AB)^* = B^* A^*$;
(iv) $A^{**} = A$.

**Bewijs.** Volgt onmiddellijk uit de eigenschappen van complexe conjugatie en transpositie.

Het bewijs van 12.4 volgt nu direkt uit 12.5 en 12.6.

De eerder geintroduceerde begrippen *Hermites* en *unitair* voor lineaire transformaties van complexe vectorruimten zijn nauw verwant aan adjungeren. De eis voor Hermites zijn was dat $< Tx, y >=< x, Ty >$ voor elke $x, y \in V$, terwijl een unitaire afbeelding voldoet aan $< Tx, Ty >=< x, y >$ voor elke $x, y \in V$. Met $I_V$ geven we de identieke afbeelding op $V$ aan.

**Propositie 12.7** *Laat $T$ een lineaire transformatie van de eindig-dimensionale complexe vectorruimte $V$ zijn. Dan geldt:*

(i) *$T$ is Hermites* $\iff$ $T^* = T$,
(ii) *$T$ is unitair* $\iff$ $TT^* = I_V = T^*T$ $\iff$ $T^* = T^{-1}$.

**Bewijs.** De transformatie $T$ is Hermites dan en slechts dan als voor elke $x, y$ geldt $< Tx, y >=< x, Ty >$; anderzijds geldt altijd $< Tx, y >=< x, T^*y >$ dus Hermites zijn is equivalent met $T = T^*$. (Hermitese transformaties heten daarom ook wel *zelf-geadjungeerd*.)

Unitair zijn betekent dat altijd $< Tx, Ty >=< x, y >$. Maar er geldt ook steeds dat $< Tx, Ty >=< T^*Tx, y >$ en dus is unitair zijn equivalent met $T^*T = I_V$. Dus $T^* = T^{-1}$, maar dan is ook $T^*T = TT^*$.

## Normaliteit

We zagen ook reeds dat Hermites of unitair zijn het bestaan van een orthonormale basis van eigenvectoren impliceerde (en dus diagonaliseerbaarheid). De omgekeerde implicatie blijkt in het complexe geval níet op te gaan: een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor diagonaliseerbaarheid in het complexe geval blijkt *normaliteit* te zijn.

**Definitie 12.8** De lineaire transformatie $T$ van een complexe vectorruimte heet *normaal* als $TT^* = T^*T$. We noemen een matrix $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ *normaal* wanneer $AA^* = A^*A$.

**Gevolg 12.9** *Zij $V$ eindig-dimensionale complexe inproductruimte, met orthonormale basis $\mathcal{E}$. Dan is $T$ normaal dan en slechts dan als $M_T^{\mathcal{E}}$ normaal is.*

**Gevolg 12.10** *Op een eindig-dimensionale complexe inproductruimte geldt:*

(i) *als $T$ Hermites is dan is $T$ normaal;*
(ii) *als $T$ unitair is dan is $T$ normaal.*

Alvorens we afleiden dat normaliteit equivalent is met het bestaan van een orthonormale basis van eigenvectoren, bekijken we enkele eigenschappen van normale transformaties.

**Stelling 12.11** *Laat $V$ een eindig-dimensionale complexe inproductruimte met orthonormale basis $\mathcal{E}$ zijn en laat $T\colon V \to V$ een lineaire transformatie zijn. Als $T$ normaal is, dan geldt:*

(i) $\|Tx\| = \|T^*x\|$ *voor alle* $x \in V$*;*

(ii) $T - \lambda I_V$ *is normaal, voor elke* $\lambda \in \mathbb{C}$*;*

(iii) *als $v$ een eigenvector voor $T$ is met eigenwaarde $\lambda$, dan is $v$ ook een eigenvector voor $T^*$, en wel met eigenwaarde $\bar{\lambda}$;*

(iv) *als $v_1$ en $v_2$ eigenvectoren van $T$ zijn bij verschillende eigenwaarden, dan $< v_1, v_2 >= 0$.*

**Bewijs.** (i) Voor elke $x \in V$ geldt

$$\|Tx\|^2 =< Tx, Tx >=< T^*Tx, x >=< TT^*x, x >=< T^*x, T^*x >= \|T^*x\|^2,$$

en lengten zijn altijd niet-negatief.
(ii) Omdat $I_V^* = I_V$ is

$$\begin{aligned}(T - \lambda I_V)^*(T - \lambda I_V) &= (T^* - \bar{\lambda} I_V)(T - \lambda I_V) = T^*T - \bar{\lambda}T - \lambda T^* + |\lambda|^2 I_V = \\ &= TT^* - \lambda T^* - \bar{\lambda}T + |\lambda|^2 I_V = (T - \lambda I_V)(T - \lambda I_V)^*.\end{aligned}$$

(iii) Beschouw $U = T - \lambda I_V$ voor de eigenwaarde $\lambda$ van $T$. Voor de bijbehorende eigenvector $v$ is dan $Uv = 0$. Volgens (ii) is $U$ normaal, zodat op grond van (i):

$$0 = \|Uv\| = \|U^*v\| = \|(T - \lambda I_V)^*v\| = \|T^*v - \bar{\lambda}v\|,$$

en daarom is $T^*v = \bar{\lambda}v$.
(iv) Omdat $\lambda_1 < v_1, v_2 >$ gelijk is aan

$$< \lambda_1 v_1, v_2 >=< Tv_1, v_2 >=< v_1, T^*v_2 >=< v_1, \bar{\lambda}_2 v_2 >= \lambda_2 < v_1, v_2 >,$$

en omdat $\lambda_1 \neq \lambda_2$ volgt dat $< v_1, v_2 >= 0$.

**Stelling 12.12** *Zij $V$ een eindig-dimensionale complexe inproductruimte, en laat $T$ een lineaire transformatie van $V$ zijn. Dan is $T$ normaal dan en slechts dan als er een orthonormale basis voor $V$ is bestaande uit eigenvectoren van $T$.*

**Bewijs.** Veronderstel dat $T$ normaal is. We plegen inductie naar de dimensie $n$. Als $n = 1$ is het duidelijk. Laat $\lambda$ een nulpunt zijn van het karakteristieke polynoom van $T$, en zij $w$ een eigenvector van $T$ bij $\lambda$. Dan is $w$ ook een eigenvector van $T^*$ (bij $\bar{\lambda}$). Zij $W$ de ruimte opgespannen door $w$ en laat $x \in W^\perp$. Dan is

$$< Tx, w >=< x, T^*w >=< x, \bar{\lambda}w >= \lambda < x, w >= 0,$$

dus $Tx \in W^\perp$, dus $W^\perp$ is $T$-invariant. Omdat $V = W \oplus W^\perp$, is $W^\perp$ een $n-1$-dimensionale $T$-invariante ruimte, waarop we de inductiehypothese kunnen toepassen: we vinden een orthonormale basis $w_2, w_3, \ldots, w_n$ van eigenvectoren van $T$. Dan is $w/\|w\|, w_2, w_3, \ldots, w_n$ een basis van de gevraagde vorm voor $V$.

Veronderstel, voor de omkering, dat $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ een orthonormale basis van $V$ is, bestaande uit eigenvectoren voor $T$. Ten opzichte van die basis wordt $T$ gegeven door een diagonaalmatrix:

$$A = M_T^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

maar dan is

$$A^* = M_{T^*}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}$$

ook een diagonaalmatrix, en diagonaalmatrices commuteren, dus $TT^* = T^*T$.

**Stelling 12.13** *Zij $V$ een eindig-dimensionale complexe inproductruimte, en laat $T$ een lineaire transformatie van $V$ zijn. Dan is $T$ unitair dan en slechts dan als er een orthonormale basis voor $V$ is bestaande uit eigenvectoren van $T$ bij eigenwaarden van absolute waarde 1.*

**Bewijs.** Als $T$ unitair is dan is $T$ normaal (volgens Gevolg 12.10) en dus bestaat er een orthonormale basis van eigenvectoren; elke eigenwaarde $\lambda$ van een unitaire afbeelding heeft $|\lambda| = 1$, omdat unitaire afbeeldingen lengten behouden (zie 11.8). Dat bewijst de ene implicatie.

Voor de omkering nemen we het bestaan aan van zo'n speciale basis $\mathcal{B}$ bestaande uit vectoren $b_i$ bij de eigenwaarden $\lambda_i$ met $|\lambda_i| = 1$. Dan is $T$ normaal (volgens Stelling 12.12), dus $b_i$ is ook eigenvector van $T^*$ met eigenwaarde $\bar{\lambda}_i$ volgens 12.11. Dus:

$$T^*Tb_i = T^*(\lambda_i b_i) = \lambda_i \bar{\lambda}_i b_i = |\lambda_i|^2 b_i = b_i,$$

dus $T^*T = I_V$ en $T$ is orthogonaal.

Tenslotte nog een stelling die verband legt tussen de begrippen normaal en unitair voor matrices.

**Definitie 12.14** Twee matrices $A$ en $B$ heten *unitair equivalent* als $A = U^*BU$ voor een unitaire matrix $U$. Merk op dat voor zulke matrices $U^* = U^{-1}$.

**Stelling 12.15** *Laat $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Dan is $A$ normaal dan en slechts dan als $A$ unitair equivalent is aan een diagonaalmatrix.*

**Bewijs.** Als $A$ normaal is, dan bestaat er een orthonormale basis voor de vectorruimte opgebouwd uit eigenvectoren van $A$ die orthonormaal zijn; maar na transformatie naar die basis is $A$ dan op diagonaalvorm gebracht, en de transformatiematrix bestaat uit de kolommen die de eigenvectoren zijn, en deze vormen een orthonormaal stelsel. Dus is de transformatiematrix unitair.

Omgekeerd, veronderstel dat $A = U^*DU$, met $U$ unitair en $D$ een diagonaalmatrix; dan is $A$ normaal:

$$AA^* = (U^*DU)(U^*DU)^* = (U^*DU)(U^*D^*U) = U^*DD^*U = U^*D^*DU = A^*A.$$

Voor reële inproductruimten is symmetrie de belangrijke eigenschap.

**Stelling 12.16** *Zij $V$ een eindig-dimensionale reële inproductruimte, en laat $T$ een lineaire transformatie van $V$ zijn. Dan is $T$ symmetrisch dan en slechts dan als er een orthonormale basis voor $V$ is bestaande uit eigenvectoren van $T$.*

**Bewijs.** Dit volgt direkt uit 11.18 en 11.13.

**Stelling 12.17** *Laat $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Dan is $A$ symmetrisch dan en slechts dan als $A$ orthogonaal equivalent is aan een diagonaalmatrix.*

**Bewijs.** De ene implicatie gaat net als in het complexe geval 12.15; omgekeerd, als $A = O^\top DO$ met $O$ orthogonaal, $D$ diagonaal, dan is $A^\top = O^\top D^\top O = O^\top DO = A$.