

Hoofdstuk 8

Enkele constructies

In dit hoofdstuk zullen we een aantal constructies van vectorruimten geven die we in het vervolg zullen gebruiken, of al hebben gebruikt in het voorgaande. Steeds is L een lichaam.

Lineaire afbeeldingen

Definitie 8.1 [Hom]

Als V en W twee L -vectorruimten zijn, dan vormt de verzameling van L -lineaire afbeeldingen van V naar W zelf weer een L -vectorruimte die we met $\text{Hom}_L(V, W)$ aangeven; hier is de optelling gedefinieerd door

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v), \quad \text{voor } v \in V,$$

voor L -lineaire afbeeldingen f, g van V naar W , en de scalaire vermenigvuldiging door

$$(\lambda f)(v) = \lambda \cdot f(v), \quad \text{voor } v \in V,$$

voor elke $\lambda \in L$.

Als $W = V$ schrijven we ook wel $\text{Hom}_L(V)$ of $\text{End}_L(V)$ voor de lineaire transformaties of endomorfismen van V .

Propositie 8.2 $\text{Hom}_L(V, W) \cong M_{n \times m}(L)$ als V en W eindige dimensie m en n hebben. In het bijzonder is dan $\dim \text{Hom}_L(V, W) = mn$.

Bewijs. Kies L -bases $\mathcal{B}$ voor V en $\mathcal{C}$ voor W . De afbeelding $\psi: \text{Hom}_L(V, W) \rightarrow M_{n \times m}(L)$ die aan $f \in \text{Hom}_L(V, W)$ de matrix ${}^{\mathcal{C}}M_f^{\mathcal{B}}$ toevoegt is surjectief (want we zagen al eerder dat elke $n \times m$ matrix een L -lineaire afbeelding bepaalt), L -lineair (omdat de optelling en scalaire vermenigvuldiging van lineaire afbeeldingen hetzelfde resultaat oplevert als de overeenkomstige operatie op de bijbehorende matrices), en heeft als kern slechts de nul-afbeelding (want als de beelden van alle basisvectoren nulvectoren zijn moeten alle beelden wel nul zijn).

Opmerkingen 8.3 Voor Hom spelen alleen optelling en scalaire vermenigvuldiging een rol, niet de samenstelling van afbeeldingen of de bijbehorende vermenigvuldiging van matrices, want die is meestal niet zinnig.

Voor $\text{Hom}_L(V, V)$ zien we dat $\text{Hom}_L(V, V) = \text{End}_L(V) \cong M_{m \times m}(L)$. In dit speciale geval is de samenstelling van twee elementen wel zinnig, en heeft $M_{m \times m}(L)$

dus nog een operatie: vermenigvuldiging. De deelverzameling van alle *inverteerbare* $n \times n$ matrices vormt een groep onder vermenigvuldiging; we geven deze groep aan met $\text{GL}_n(L)$, de *algemene lineaire groep* van dimensie n over L . Als verzameling bestaat $\text{GL}_n(L)$ dus uit alle $n \times n$ matrices met determinant ongelijk aan 0. De deelverzameling van $\text{GL}_n(L)$ bestaande uit matrices met determinant 1 wordt de *speciale lineaire groep* van dimensie n over L genoemd. Deze deelverzameling vormt zelf weer een groep die met $\text{SL}_n(L)$ wordt aangeduid.

Duale

Een speciaal geval treedt op wanneer W één-dimensionaal is.

Definitie 8.4 [Duale]

Als $W = L^1$ noemen we $\text{Hom}(V, W) = \text{Hom}(V, L)$ de *duale ruimte* van V , en gebruiken we de notatie $V^* = \text{Hom}(V, L)$, terwijl we de elementen van die duale eerder al *lineaire functionalen* noemden.

Gevolg 8.5 *Als V eindig-dimensionaal is, dan is $\dim V^* = \dim V = m$.*

Definities 8.6 Zij V een L -vectorruimte van dimensie m , en laat $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ een basis voor V zijn. We definiëren de lineaire functionalen $b_1^*, b_2^*, \dots, b_m^*$ door b_i^* aan $v = v_1b_1 + \dots + v_ib_i + \dots + v_mb_m \in V$ het element $v_i \in L$ toe te laten voegen; deze b_i^* heten de *coördinatenfuncties* van V (met betrekking tot $\mathcal{B}$). Op grond van de volgende stelling wordt $\mathcal{B}^* = \{b_1^*, b_2^*, \dots, b_m^*\}$ de *duale basis* van V met betrekking tot $\mathcal{B}$ genoemd.

Merk op dat $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$, waar als gebruikelijk de *Kronecker-delta* gegeven is door $\delta_{ij} = 1$ als $i = j$ en $\delta_{ij} = 0$ als $i \neq j$.

Stelling 8.7 *Wanneer $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ een basis voor V is, dan vormt $\mathcal{B}^* = \{b_1^*, b_2^*, \dots, b_m^*\}$ een basis voor V^* .*

Bewijs. Het is duidelijk dat de b_i^* elementen van V^* zijn, zodat het op grond van voorgaand Gevolg voldoende is te laten zien dat de b_i^* onafhankelijk zijn. Veronderstel daartoe dat

$$\lambda_1 b_1^* + \lambda_2 b_2^* + \dots + \lambda_m b_m^* = 0 \in V^*,$$

voor zekere $\lambda_i \in L$; dan is

$$0(b_i) = \lambda_1 b_1^*(b_i) + \lambda_2 b_2^*(b_i) + \dots + \lambda_m b_m^*(b_i) = \lambda_i,$$

en dus zijn alle $\lambda_i = 0$. Hetgeen te bewijzen was.

Stelling 8.8 *Voor een eindig-dimensionale vectorruimte V geldt:*

$$V \cong V^{**}.$$

Bewijs. Definieer $\beta: V \rightarrow V^{**}$ door aan $v \in V$ de afbeelding $\hat{v}: V^* \rightarrow L$ toe te voegen waarvoor $\hat{v}(u^*) = u^*(v)$ voor elke $u^* \in V^*$. Dan is het gemakkelijk in te zien dat $\hat{v}$ inderdaad een lineaire functionaal op V^* is, dus een element van V^{**} . Ook is eenvoudig in te zien dat β een isomorfisme is, als volgt. Lineariteit geldt omdat

$$\beta(v_1 + \lambda v_2)(u^*) = u^*(v_1 + \lambda v_2) = u^*(v_1) + \lambda u^*(v_2) = (\beta(v_1) + \lambda \beta(v_2))(u^*).$$

Veronderstel dat $\beta(v) = 0 \in V^{**}$, dat wil zeggen dat $\hat{v}(u^*) = 0$ voor elke $u^* \in V^*$; als $v \neq 0$ dan is er een functionaal v^* met $v^*(v) = 1$ (bijvoorbeeld met Stelling 8.7 omdat $\{v\}$ is aan te vullen tot een basis $\{v, b_2, \dots, b_m\}$ voor V als V eindig-dimensionaal is). Maar dan geeft $\hat{v}(v^*) = v^*(v) = 1 \neq 0$ een tegenspraak, dus moet $v = 0$ zijn; met andere woorden, β is injectief.

Tenslotte is $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$, en dus is β een isomorfisme.

Opmerkingen 8.9 We zagen al dat $\dim V = \dim V^*$, en dus ook $\dim V^* = \dim V^{**}$ voor eindig-dimensionale V . Omdat elke vectorruimte van dimensie m over L isomorf is met L^m zijn deze drie vectorruimten ook allemaal isomorf met elkaar. Voor het bewijs van $V^* \cong V$ maakten we een basiskeuze, die in het bewijs van $V \cong V^{**}$ niet nodig was. Wanneer je zorgvuldig naar het laatste bewijs kijkt, zie je dat de eindige dimensie pas een rol speelt in de allerlaatste stap: daarvoor wordt een injectie van V in V^{**} gemaakt die ook in oneindig-dimensionale geval geldt.

Het volgende voorbeeld laat zien dat in het algemeen $V \not\cong V^{**}$ voor oneindig-dimensionale V .

Voorbeeld 8.10 Laat V de vectorruimte $\mathbb{F}_2[x]$ van polynomen over $\mathbb{F}_2$ zijn. Een basis van V wordt gegeven door de polynomen $e_i = x^i$, voor $i = 0, 1, \dots$. De functionalen e_i^* zijn dan vastgelegd door $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. Bij een willekeurige f uit V vinden we nu $\beta(f) \in V^{**}$ als het element $\hat{f}$ van $V^{**} = \text{Hom}(V^*, \mathbb{F}_2)$ waarvoor $\hat{f}(g^*) = g^*(f) = \sum_{i=0}^n g_i^* f_i$, waar $n = \deg f$, en g_i^* en f_i de coëfficiënten van g^* en f op de basis e_i^* , resp. e_i . In ieder geval is $\hat{f}(e_k^*) = f_k$ gelijk aan 0 voor $k > \deg f$. Dus alle functionalen van de vorm $\beta(f)$ zijn 0 op e_k^* vanaf zekere index k .

Maar het is niet moeilijk te zien dat je zo niet alle functionalen op V^* krijgt: omdat alle e_i^* onafhankelijk zijn, kun je een element r uit V^{**} maken met $r(e_i^*) = 1$ voor alle i .

Definitie 8.11 Laten V en W eindig-dimensionale L -vectorruimten zijn van dimensie m en n . Als f een L -lineaire afbeelding $f: V \rightarrow W$ is dan definiëren we de *getransponeerde* van f als de afbeelding $f^T: W^* \rightarrow V^*$ waarvoor $f^T(w^*) = w^* \circ f$.

Zo is $f^T \in \text{Hom}(W^*, V^*) = \text{Hom}(\text{Hom}(W, L), \text{Hom}(V, L))$.

Stelling 8.12 Laten V en W eindig-dimensionale L -vectorruimten zijn met bases $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_m\}$ en $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$. Dan geldt:

$$\mathcal{V}^* M_{f^T}^{\mathcal{W}^*} = (\mathcal{W} M_f^{\mathcal{V}})^T.$$

Opmerkingen 8.13 De laatste stelling drukt dus uit de matrix van de getransponeerde afbeelding de getransponeerde matrix van de oorspronkelijke afbeelding is mits we bases door hun duale vervangen.

De essentiële stap in het bewijs is de volgende regel, die laat zien dat ten opzichte van de basis $\mathcal{V}^*$ de i -de coëfficiënt van $f^T(w_j^*)$, die op plaats i, j in de matrix voor f^T staat, gelijk is aan

$$(w_j^* \circ f)(v_i) = w_j^*(\alpha_{1i} w_1 + \dots + \alpha_{ni} w_n) = \alpha_{ji},$$

waar α_{rs} op plaats r, s in de matrix voor f staat.

Het belang van deze definitie van getransponeerde afbeelding is dat deze niet van de keuze van bases afhangt! We hebben de operatie transponeren (die op matrices, dus op lineaire afbeeldingen gegeven ten opzichte van gekozen bases, ‘natuurlijk’ is) nu basiskeuze-vrij gemaakt.

Quotiënt

Definitie 8.14 [Quotiënt]

Als V een L -vectorruimte is, en U een lineaire deelruimte, dan heet voor iedere $v \in V$ de verzameling

$$v + U = \{v + u : u \in U\},$$

een *nevenklasse* van U in V . Omdat $v_1 + U = v_2 + U$ dan en slechts dan als $v_1 - v_2 \in U$, geldt dat $v_1 + U$ en $v_2 + U$ ofwel disjunct zijn, ofwel samenvallen:

$$(v_1 + U) \cap (v_2 + U) = \emptyset \quad \text{of} \quad v_1 + U = v_2 + U.$$

Daarom splitsen de nevenklassen de hele ruimte op in een disjuncte vereniging. Bovendien vormen de nevenklassen een vectorruimte, die we met V/U aangeven, als we optelling definiëren door $(v_1 + U) + (v_2 + U) = (v_1 + v_2) + U$ en scalaire vermenigvuldiging door $\lambda(v_1 + U) = (\lambda v_1) + U$. De ruimte V/U is de *quotiëntruimte* van U in V .

Stelling 8.15 *Als V een eindig-dimensionale vectorruimte is, dan geldt voor elke lineaire deelruimte U :*

$$\dim V/U = \dim V - \dim U.$$

Bewijs. Vul een basis $u_1, u_2, \dots, u_k$ van U aan tot een basis $u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_m$ van V . We beweren nu dat $u_{k+1} + U, \dots, u_m + U$ een basis voor V/U vormt; het is duidelijk dat daaruit volgt dat $\dim V/U = m - k = \dim V - \dim U$.

Om die bewering te bewijzen, veronderstellen we eerst eens dat er een afhankelijkheid $\sum_{i=k+1}^m \lambda_i(u_i + U) = 0 \in V/U$ zou bestaan. Dit impliceert dat $\sum_{i=k+1}^m \lambda_i u_i + \lambda_i U = \sum_{i=k+1}^m \lambda_i u_i + U = U$, dus dat $\sum_{i=k+1}^m \lambda_i u_i \in U$; dan bestaan er dus $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ zodat $\sum_{i=k+1}^m \lambda_i u_i - \sum_{j=1}^k \lambda_j u_j = 0$, in tegenspraak met het gegeven dat $u_1, \dots, u_m$ een basis van V is, tenzij alle $\lambda_i = 0$.

Anderzijds: elke $v \in V$ is te schrijven als $v = \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i$, en omdat $\sum_{i=1}^k \lambda_i u_i \in U$, is de nevenklasse $v + U = \sum_{i=k+1}^m \lambda_i u_i + U$, dat wil zeggen dat elke nevenklasse te schrijven is als lineaire combinatie van de $u_i + U$.

Opmerkingen 8.16 Als V eindig-dimensionaal is heet de dimensie van V/U wel de *co-dimensie* van U in V .

Door op de afbeelding $V \rightarrow V/U$, die aan $v \in V$ de nevenklasse $v + U$ toevoegt, de dimensiestelling 4.6 toe te passen, volgt bovenstaande stelling ook direct.

Directe som

Definitie 8.17 [Directe som]

Als W een L -vectorruimte is en $V_1, V_2, \dots, V_k$ zijn lineaire deelruimten van W , dan is de *som* van die deelruimten de lineaire deelruimte gedefinieerd door

$$V = \sum_{i=1}^k V_i = V_1 + V_2 + \dots + V_k = \{v_1 + v_2 + \dots + v_k : v_i \in V_i\}.$$

Een som heet een *directe som*, en we schrijven $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$, als geldt dat elke $v \in V$ op precies één manier te schrijven is als $v = v_1 + v_2 + \dots + v_k$ met $v_i \in V_i$ voor $1 \leq i \leq k$.

Stelling 8.18 Zij V een vectorruimte met lineaire deelruimten $V_1, V_2, \dots, V_k$. Dan zijn de volgende beweringen equivalent:

- (i) $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$;
- (ii) $V = V_1 + V_2 + \dots + V_k$ en $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{0\}$ voor $i = 1, 2, \dots, k$;
- (iii) $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_k$ vormt een basis voor V als $\mathcal{B}_i$ een basis voor V_i is ($1 \leq i \leq k$).

Bewijs. (i) $\Rightarrow$ (ii) Als $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$ dan zeker $V = V_1 + V_2 + \dots + V_k$, en veronderstel dat $v \in V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j$. Dan is $0 = 0 + 0 = v + (-v)$ en dat geeft twee verschillende manieren om $0 \in V$ als som van elementen van V_i en $\sum_{j \neq i} V_j$ te schrijven, in tegenspraak met de aanname dat de som direct is, tenzij $v = 0$. Dus is 0 de enige vector in de doorsnede.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Laat $\mathcal{B}_i = b_1^{(i)}, \dots, b_{n_i}^{(i)}$ een basis voor V_i zijn. Het is eenvoudig in te zien dat $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_k$ dan een opspannend stelsel voor $V_1 + V_2 + \dots + V_k$ is. We moeten laten zien dat de voorwaarde $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{0\}$ voor $i = 1, 2, \dots, k$ impliceert dat $\mathcal{B}$ een basis is. Veronderstel eens dat $\mathcal{B}$ geen basis is, dan is er kennelijk een afhankelijkheid van de vorm

$$\sum_{j=1}^k (\lambda_1^{(j)} b_1^{(j)} + \dots + \lambda_{n_j}^{(j)} b_{n_j}^{(j)}) = 0.$$

Veronderstel dat $\lambda_r^{(i)} \neq 0$ voor zekere $1 \leq r \leq n_i$; als voor elke $j \neq i$ en elke index m met $1 \leq m \leq n_j$ geldt dat $\lambda_m^{(j)} = 0$ dan is $w = \lambda_1^{(i)} b_1^{(i)} + \dots + \lambda_{n_i}^{(i)} b_{n_i}^{(i)} = 0$ met tenminste 1 coëfficiënt ongelijk aan 0, in tegenspraak met het feit dat $\mathcal{B}_i$ een basis voor V_i is. Maar dan moet $w \neq 0$, en is $w \in V_i$ en $-w \in \sum_{j \neq i} V_j$, en dus zit w in de doorsnede van beide, in tegenspraak met onze aanname. Kennelijk kan er geen $\lambda_r^{(i)} \neq 0$ bestaan: het stelsel $\mathcal{B}$ is onafhankelijk.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Laat $\mathcal{B}_i$ een basis voor V_i zijn, en veronderstel dat $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_k$ een basis voor V is; het is direct duidelijk dat $V = V_1 + V_2 + \dots + V_k$, we moeten aantonen dat deze som *direct* is. Veronderstel eens dat dit niet zo is, dat wil zeggen, er is een $v \in V$ die twee schrijfwijzen $v = v'_1 + \dots + v'_k = v''_1 + \dots + v''_k$ heeft met $v'_i, v''_i \in V_i$ voor $1 \leq i \leq k$. Voor tenminste één i is $v'_i \neq v''_i$; schrijf $w' = v'_i$ en $w'' = v''_i$, en ook $x' = \sum_{j \neq i} v'_j$ en $x'' = \sum_{j \neq i} v''_j$. Dan is $w' + x' = w'' + x'' = v$, en dus $w' - w'' = x'' - x'$. Schrijf elk van de v'_r en v''_r nu op de basis $\mathcal{B}_r$ voor $1 \leq r \leq k$; dan hebben we een niet-triviale lineaire combinatie van elementen van $\mathcal{B}$ met als som 0, in tegenspraak met de veronderstelling dat $\mathcal{B}$ een basis voor V is.

Gevolg 8.19 Als $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ dan is $\dim V = \dim V_1 + \dots + \dim V_k$.

Voorbeelden 8.20 Elke vectorruimte is de directe som van de 1-dimensionale deelruimten $\langle b_i \rangle$ opgespannen door een basisvector. Zo is L^3 natuurlijk te schrijven als $L^3 = L \oplus L \oplus L = L \cdot e_1 \oplus L \cdot e_2 \oplus L \cdot e_3$, maar ook is $L^3 = L^2 \oplus L$.

Als $U \subset V$ een lineaire deelruimte is, bestaat er altijd een deelruimte $T \subset V$ zodat $T \oplus U = V$. Dat is eenvoudig in te zien door een basis van U aan te vullen met vectoren $t_1, \dots, t_k$ tot een basis voor V . De ruimte opgespannen door de t_i kan dan voor T genomen worden; T heet in zo'n geval een *complement* van U .

Stelling 8.21 Laat een eindig-dimensionale vectorruimte V met een lineaire transformatie T gegeven zijn, en veronderstel dat er deelruimten $U_1, U_2, \dots, U_k$ van V

bestaan zodanig dat $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$ en U_i is invariant ten opzichte van T .
 Dan geldt:

$$M_T = M_{T_1} \oplus M_{T_2} \oplus \cdots \oplus M_{T_k},$$

wanneer $T_i = T|_{U_i}$ de beperking tot U_i is, $M_T = M_T^{\mathcal{B}}$ de matrix van T ten opzichte van $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_k$ is, en $M_{T_i} = M_{T_i}^{\mathcal{B}_i}$ de matrix van T_i ten opzichte van $\mathcal{B}_i$, voor bases $\mathcal{B}_i$ van U_i .

Bewijs. Bekijk het beeld van een basis vector uit $\mathcal{B}_j$: dat is een lineaire combinatie van de vectoren uit $\mathcal{B}_j$ zelf, gegeven door de juiste kolom uit M_{T_j} .