

bestaan zodanig dat $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$ en U_i is invariant ten opzichte van T . Dan geldt:

$$M_T = M_{T_1} \oplus M_{T_2} \oplus \cdots \oplus M_{T_k},$$

wanneer $T_i = T|_{U_i}$ de beperking tot U_i is, $M_T = M_T^{\mathcal{B}}$ de matrix van T ten opzichte van $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_k$ is, en $M_{T_i} = M_{T_i}^{\mathcal{B}_i}$ de matrix van T_i ten opzichte van $\mathcal{B}_i$, voor bases $\mathcal{B}_i$ van U_i .

Bewijs. Bekijk het beeld van een basis vector uit $\mathcal{B}_j$: dat is een lineaire combinatie van de vectoren uit $\mathcal{B}_j$ zelf, gegeven door de juiste kolom uit M_{T_j} .

Tensorproduct

De laatste constructie, die van het tensorproduct, vereist een aanloop. We beginnen met de definitie van bilineariteit.

Definitie 8.22 Laten U, V en W allen L -vectorruimten zijn. Dan heet een afbeelding $B : U \times V \rightarrow W$, die aan (u, v) een element $B(u, v) \in W$ toevoegt een *bilineaire afbeelding* op $U \times V$ als

- (1) Voor elke $v \in V$ is de afbeelding $B_v : U \rightarrow W$, gedefinieerd door $B_v(u) = B(u, v)$, een L -lineaire afbeelding; en
- (2) Voor elke $u \in U$ is de afbeelding $B_u : V \rightarrow W$, gedefinieerd door $B_u(v) = B(u, v)$, een L -lineaire afbeelding.

Met andere woorden: voor alle scalaren $\lambda, \mu \in L$ en alle $u, u_1, u_2 \in U$ en alle $v, v_1, v_2 \in V$ moet zowel gelden dat

$$B(\lambda u_1 + \mu u_2, v) = \lambda B(u_1, v) + \mu B(u_2, v),$$

als

$$B(u, \lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda B(u, v_1) + \mu B(u, v_2).$$

Een speciaal geval van een bilineaire afbeelding is het geval dat $W = L^1$, dus de bilineaire afbeelding geeft scalaren als beeld: in dat geval noemen we B een *bilineaire vorm* op $U \times V$.

Voorbeelden 8.23 (i) Het standaardinproduct $\langle v, w \rangle$ op L^n , gegeven door $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i$ is een belangrijk voorbeeld van een bilineaire vorm op $L^n \times L^n$. We komen hierop in het volgende hoofdstuk uitgebreid terug.

(ii) Als $A \in M_{m \times n}(L)$ een $m \times n$ matrix is dan geeft $B_A(v, w) = v^T A w \in L$ een bilineaire vorm op $L^m \times L^n$. Omgekeerd, wanneer we in U een basis kiezen, zeg $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_m\}$, en in V net zo een basis $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\}$, dan is een bilineaire vorm B geheel bepaald door de waarden $B(b_i, c_j)$. Bijgevolg kunnen we B representeren door een $m \times n$ matrix, namelijk de matrix waarin op positie i, j de waarde van $B(b_i, c_j)$ staat. Met andere woorden: na basiskeuze is er een bijjectie tussen bilineaire vormen op $U \times V$ en $M_{m \times n}(L)$. Na basiskeuze is elke bilineaire vorm te schrijven als:

$$B\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}\right) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) M_B \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

waar M_B de matrix $B(b_i, c_j)$ is.

- (iii) Als U, V beiden L -vectorruimten zijn, dan is de *evaluatie-afbeelding* $\phi : \text{Hom}_L(U, V) \times U \rightarrow V$, gedefinieerd door $\phi(f, u) = f(u)$ een bilineaire afbeelding. In het bijzonder is $\phi : U^* \times U \rightarrow L$ een bilineaire vorm op $U^* \times U$.
- (iv) Laat weer U, V beiden L -vectorruimten zijn, en laat $f \in U^*$, en $g \in V^*$. Dan is de *productafbeelding* $\psi : U \times V \rightarrow L$, gegeven door $\psi(u, v) = f(u) \cdot g(v)$ een bilineaire vorm op $U \times V$.
- (v) Als nu $u \in U$ en $v \in V$, dan is de afbeelding $\rho : U^* \times V^* \rightarrow L$ gegeven door $\rho(f, g) = f(u) \cdot g(v)$ een bilineaire vorm.

Het tensorproduct, dat we hieronder precies zullen definiëren, generaliseert het laatste voorbeeld van $U^* \times V^*$ naar $\text{Hom}_L(U, W) \times \text{Hom}_L(V, W)$.

Er zijn diverse definities van het tensorproduct, die natuurlijk uiteindelijk equivalent zijn, sommige toegankelijker dan andere. We beginnen met een abstracte definitie en vermelden daarna enkele alternatieven.

Definitie 8.24 Laten U en V vectorruimten over het lichaam L zijn.

We definiëren het tensorproduct van U en V met behulp van de vectorruimte Z verkregen door als basis alle paren (u, v) met $u \in U$ en $v \in V$ te nemen, en de deelruimte $Y \subset Z$ voortgebracht door alle vectoren van de vorm $\lambda \cdot (u, w) + \mu \cdot (v, w) - (\lambda u + \mu v, w)$ en van de vorm $\lambda \cdot (u, v) + \mu \cdot (u, w) - (u, \lambda v + \mu w)$.

Nu is het *tensorproduct* $U \otimes V$ van U en V de vectorruimte Z/Y , dus het quotiënt van Z en Y .

De *tensorafbeelding* is de afbeelding $t : U \times V \rightarrow U \otimes V$ die het paar (u, v) naar de nevenklasse $(u, v) + Y$ stuurt.

Opmerkingen 8.25 Deze definitie maakt gebruik van het quotiënt, eerder in dit hoofdstuk gedefinieerd. Daartoe wordt eerst een veel te grote vectorruimte Z gemaakt, en daarvan wordt een quotiënt genomen. Bij het nemen van een quotiënt, ook wel *uitdelen* naar de deelruimte genoemd, wordt de hele deelruimte als 1 enkel nieuw object gezien: in feite worden alle elementen van de deelruimte met elkaar geïdentificeerd tot één nieuw object. De elementen van het quotiënt Z/Y zijn dan nevenklassen van de vorm $\alpha + Y$. Hierbij is $\alpha \in Z$, dus van de vorm $\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot (u_i, v_i)$ voor zekere m , $\lambda_i \in L$, en paren $(u_i, v_i) \in U \times V$. Omdat $\lambda \cdot (u, v) - (\lambda u, v) \in Y$, is ook $\sum_{i=1}^m (\lambda_i \cdot (u_i, v_i) + Y) = \sum_{i=1}^m ((\lambda_i u_i, v_i) + Y) = \sum_{i=1}^m ((u'_i, v_i) + Y)$ dus de nevenklassen zijn allemaal van de vorm $\sum_i ((u_i, v_i) + Y)$. Vaak wordt $(u, v) + Y$ afgekort tot $u \otimes v$, en dus is elk element van $U \otimes V$ een eindige som $\sum u_i \otimes v_i$.

De deelruimte Y bestaat precies uit elementen van Z die onder *elke bilineaire afbeelding op 0 afgebeeld moeten worden*: immers, dat h een bilineaire afbeelding is betekent dat $h((\lambda u_1 + \mu u_2, v)) = h(\lambda \cdot (u_1, v) + \mu \cdot (u_2, v))$ dus dat

$$h((\lambda u_1 + \mu u_2, v) - \lambda \cdot (u_1, v) - \mu \cdot (u_2, v)) = 0$$

en net zo op de tweede coördinaat. Dat maakt de volgende stelling, die het belang van het tensorproduct aangeeft, aannemelijk, ook zonder dat we een formeel bewijs geven. Informeel gezegd drukt de stelling uit dat het tensorproduct niet meer en niet minder elementen van Z identificeert dan nodig voor willekeurige bilineaire afbeeldingen.

Stelling 8.26 Voor elke bilineaire afbeelding $f : U \times V \rightarrow W$ is er een unieke lineaire afbeelding $\tau : U \otimes V \rightarrow W$ zodanig dat $f = \tau \circ t$.

In het geval dat U en V beide eindig-dimensionaal zijn, kunnen we het volgende doen: kies een basis $b_1, \dots, b_m$ voor U en een basis $c_1, \dots, c_n$ voor V en maak een nieuwe vectorruimte (die $U \otimes V$ zal zijn) met als basis de elementen $b_i \otimes c_j$ en een afbeelding t die aan het paar (b_i, c_j) het element $b_i \otimes c_j$ toevoegt, en verder bilineair wordt voortgezet tot alle paren $(u, v) \in U \times V$.

Gevolg 8.27 Als U, V eindig-dimensionaal zijn is $\dim U \otimes V = \dim U \cdot \dim V$.

Opmerkingen 8.28 Merk op dat t simpelweg bilineair werd voortgezet; het is goed om op te merken dat dit net als in de algemene definitie boven tot gevolg heeft dat bijvoorbeeld altijd

$$(\lambda u) \otimes v = \lambda \cdot (u \otimes v) = u \otimes (\lambda v).$$

Omdat de elementen $b_i \otimes c_j$ een basis vormen, geldt nu natuurlijk dat elk element van $U \otimes V$ te schrijven is als $\sum_{i=1, j=1}^{m, n} \lambda_{ij} b_i \otimes c_j$, maar door het bovenstaande toe te passen ook als $\sum_{i=1}^m b_i \otimes v_i$ voor zekere $v_i \in V$ of $\sum_{j=1}^n u_j \otimes c_j$ voor zekere $u_j \in U$.

Het tensorproduct stelt ons in staat om een soort product te definiëren op de vectorruimten $\text{Hom}_L(U_1, V_1)$ en $\text{Hom}_L(U_2, V_2)$. We geven de resultaten hier zonder bewijs (zie bijvoorbeeld: Steven Roman, *Advanced Linear Algebra*, Hoofdstuk 14), dat eigenlijk alleen de eigenschap uit Stelling 8.26 gebruikt.

Stelling 8.29 Er is een unieke lineaire afbeelding

$$\theta : \text{Hom}_L(U_1, V_1) \otimes \text{Hom}_L(U_2, V_2) \rightarrow \text{Hom}_L(U_1 \otimes U_2, V_1 \otimes V_2),$$

gedefinieerd door $\theta(\sigma \otimes \tau)(u \otimes v) = \sigma u \otimes \tau v$. Bovendien is θ altijd injectief, en het is een isomorfisme als U_1, U_2, V_1, V_2 eindig-dimensionaal zijn.

Hieruit volgt direct, door $U_1 = U$, $U_2 = V$ en $V_1 = L^1 = V_2$ te nemen, de volgende stelling over het tensorproduct van dualen.

Gevolg 8.30 Als U, V eindig-dimensionale L -vectorruimten zijn, is

$$U^* \otimes V^* \cong (U \otimes V)^*,$$

waar $(f \otimes g)(u \otimes v) = f(u) \cdot g(v)$.

Tenslotte zeggen we iets over het *tensorproduct van matrices*. Immers, in het eindig-dimensionale geval zegt Stelling 8.29 dat bij een paar (A, B) van matrices corresponderend met twee lineaire afbeeldingen (van U_1 naar V_1 en van U_2 naar V_2), op een unieke manier een matrix $A \otimes B$ te maken is die hoort bij een afbeelding van $U_1 \otimes U_2$ naar $V_1 \otimes V_2$. Hoewel direct duidelijk is wat de afmetingen van $A \otimes B$ zouden moeten zijn (namelijk $m_1 m_2 \times n_1 n_2 = \dim U_1 \cdot \dim U_2 \times \dim V_1 \cdot \dim V_2$) is de precieze vorm van de matrix afhankelijk van hoe we in het algemeen de basis $b_i \otimes c_j$ voor $U \otimes V$ ordenen! Eén voor de hand liggende manier is om deze basis $b_1 \otimes c_1, b_1 \otimes c_2, \dots, b_1 \otimes c_n, \dots, b_m \otimes c_1, \dots, b_m \otimes c_n$ te laten zijn. De matrix $A \otimes B$ wordt dan

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}B & \alpha_{12}B & \cdots & \alpha_{1n_1}B \\ \alpha_{21}B & \alpha_{22}B & \cdots & \alpha_{2n_1}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m_1 1}B & \alpha_{m_1 2}B & \cdots & \alpha_{m_1 n_1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} & \cdots & \alpha_{1n_1}\beta_{1n_2} \\ \alpha_{11}\beta_{21} & \cdots & \alpha_{1n_1}\beta_{2n_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m_1 1}\beta_{m_2 1} & \cdots & \alpha_{m_1 n_1}\beta_{m_2 n_2} \end{pmatrix}.$$