Huiswerkopgaven X

♠ **Huiswerk X-1.** In deze opgave schrijven we elementen van $\mathbb{Q}^2$ als rijvectoren. Zijn de onderstaande afbeeldingen van $\mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^2$ naar $\mathbb{Q}$ bilineair? Zo ja, laat dat zien door de Grammatrix ten opzichte van de standaardbasis te geven; zo nee, geef een voorbeeld waaruit dat blijkt.

(i) $A((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = a_1^2 b_1^2 + a_2 b_2$
(ii) $B((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2 + 1$
(iii) $C((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = a_1 + b_1 + a_2 b_2$
(iv) $D((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = a_1 b_1 - a_2 b_2 + a_1 a_2 - b_1 b_2$
(v) $E((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = a_1 b_1$.
(vi) $F((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)$.

♠ **Huiswerk X-2.** Laat B de bilineaire vorm op $\mathbb{Q}^2$ zijn die aan vectoren $v, w \in \mathbb{Q}^2$ met coordinaten v_1, v_2, w_1, w_2 ten opzichte van de standaardbasis toevoegt $\mathsf{B}(v, w) = 2v_1 w_1 - v_1 w_2 + v_2 w_1 - 3v_2 w_2$.

(i) Bepaal de matrix M_{B} voor B ten opzichte van de standaardbasis.
(ii) Bepaal $M_{\mathsf{B}}^{\mathcal{C}}$ voor B ten opzichte van de basis $\mathcal{C} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ door $M_{\mathsf{B}}^{\mathcal{C}}$ te schrijven als $T^{\mathsf{T}} M_{\mathsf{B}} T$ voor een basistransformatie T.
(iii) Bepaal $M_{\mathsf{B}}^{\mathcal{C}}$ ook rechtstreeks door $\mathsf{B}(c_i, c_j)$ uit te rekenen, waar $c_i, c_j \in \mathcal{C}$.

♠ **Huiswerk X-3.** In deze opgave is A^{T} natuurlijk de getransponeerde van de matrix A.

(i) Bewijs dat voor alle 2×2 matrices A en B geldt: $(A \cdot B)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}} \cdot A^{\mathsf{T}}$.
(ii) Bewijs dat $(A \cdot B)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}} \cdot A^{\mathsf{T}}$ voor alle vierkante matrices A, B; gebruik dat op positie i, j van $A \cdot B$ het element $A_{i*} B_{*j}$ staat, waar A_{i*} de i-de rij van A is, en B_{*j} de j-de kolom van B.
(iii) Gebruik (ii) om te laten zien dat $(A^{-1})^{\mathsf{T}} = (A^{\mathsf{T}})^{-1}$.
(iv) Laat zien dat $A + A^{\mathsf{T}}$ een symmetrische matrix is, voor elke vierkante matrix A.
(v) Bewijs dat als de vierkante matrix A equivalent is met een diagonaalmatrix, A een symmetrische matrix is.

♠ **Huiswerk X-4.** [**Kegelsneden**] We bekijken kwadratische vormen $Q(x, y)$ in twee variabelen over $\mathbb{R}$.

(i) Breng de kwadratische vorm $Q(x, y) = xy$ op diagonaalvorm op twee manieren: door Stelling 9.10 te gebruiken en door de methode uit Voorbeeld 9.24 te gebruiken.
(ii) Beschrijf voor alle mogelijke invarianten voor $Q(x, y)$ in diagonaalvorm de oplossingsverzameling in $\mathbb{R}^2$ van $Q(x, y) = 1$, voor $Q(x, y) = 0$ en voor $Q(x, y) = -1$. [Bijvoorbeeld: als $n_0 = 0, n_+ = 2, n_- = 0$ dan beschrijft $q_1 x^2 + q_2 y^2 = 1$ een ellips (die een cirkel is als $q_1 = q_2$), en $q_1 x^2 + q_2 y^2 = 0$ een punt (namelijk $(0, 0)$), terwijl $q_1 x^2 + q_2 y^2 = -1$ geen oplossingen heeft.]