Huiswerkopgaven XI

♠ **Huiswerk XI-1.** Ten opzichte van de standaardbasis e_1, e_2, e_3 van $\mathbb{R}^3$ zijn de bilineaire vormen B en C gedefinieerd door $\mathsf{B}(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3) = a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + a_2b_3 + a_3b_1 + a_3b_2$, en $\mathsf{C}(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3) = a_1b_1 + a_1b_2 - a_1b_3 + a_2b_1 + a_2b_3 - a_3b_1 + a_3b_2 - 3a_3b_3$.

(i) Laat zien dat B en C allebei symmetrisch zijn.

(ii) Bepaal de Grammatrix van B en die van C.

(iii) Gebruik het algoritme op blz. 61 van het diktaat om bilineaire vormen B' en C' te vinden waarvan de Grammatrix een diagonaalmatrix is en waarvoor geldt dat $\mathsf{B}' \sim \mathsf{B}$ en $\mathsf{C}' \sim \mathsf{C}$.

(iv) Is $\mathsf{B} \sim \mathsf{C}$?

(v) Bepaal de bij C behorende kwadratische vorm Q en bepaal hiervoor een 'diagonaalvorm' zoals in Voorbeeld 9.24.

(vi) Doe hetzelfde voor de kwadratische vorm die bij B hoort; je kunt hiervoor kijken naar de manier waarop je B' uit B verkreeg in (iii).

♠ **Huiswerk XI-2. [Het meetkundige en het rekenkundige gemiddelde]**

(i) Bewijs de ongelijkheid $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$ voor niet-negatieve reële getallen x en y op twee manieren: rechtstreeks, door beide zijden te kwadrateren, en met behulp van de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz voor de vectoren $\begin{pmatrix}\sqrt{x}\\ \sqrt{y}\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}\sqrt{y}\\ \sqrt{x}\end{pmatrix}$.

(ii) Veronderstel dat je weet dat voor alle niet-negatieve reële getallen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ geldt:

$$\sqrt[k]{x_1x_2\cdots x_k} \le \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k}.$$

Bewijs dan dat ook voor alle niet-negatieve reële getallen $y_1, y_2, \ldots, y_{2k}$ geldt

$$\sqrt[2k]{y_1y_2\cdots y_{2k}} \le \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_{2k}}{2k},$$

(door te schrijven $x_1 = \frac{y_1+y_2}{2}, \ldots, x_k = \frac{y_{2k-1}+y_{2k}}{2}$ en (i) te gebruiken).

(iii) Veronderstel weer dat je weet dat voor alle niet-negatieve reële $x_1, x_2, \ldots, x_k$ geldt:

$$\sqrt[k]{x_1x_2\cdots x_k} \le \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k}.$$

Laat zien dat dan volgt dat voor alle niet-negatieve reële getallen $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ geldt dat

$$\sqrt[k-1]{x_1x_2\cdots x_{k-1}} \le \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1}}{k-1},$$

(door $x_k = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}}{k-1}$ te nemen).

De onderdelen (i), (ii) en (iii) laten zien dat voor alle n niet-negatieve reële getallen $x_1, \ldots, x_n$ geldt dat het *meetkundig gemiddelde* $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ ten hoogste gelijk is aan het *rekenkundig gemiddelde* $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.

(iv) Laat zien dat onder alle rechthoeken met een omtrek van 20 cm het vierkant de grootste oppervlakte heeft.

(v) Laat zien dat onder alle rechthoekige blokken met een inhoud van 8 cm^3 de kubus de kleinste oppervlakte heeft.