
Huiswerkopgaven XII

♠ **Huiswerk XII-1.**

- (i) Bewijs dat voor elke lineaire deelruimte W van een inproductruimte V geldt dat $W \cap W^\perp = \{0\}$.
- (ii) Bewijs dat een orthogonaal stelsel van niet-nul vectoren lineair onafhankelijk is.

♠ **Huiswerk XII-2.** Deze opgave gaat over de generalisatie van twee stellingen uit de vlakke meetkunde naar inproductruimten.

- (i) Bewijs de Stelling van Pythagoras in een inproductruimte: als v en w orthogonale vectoren zijn dan is $\|v\|^2 + \|w\|^2 = \|v + w\|^2$.
- (ii) Bewijs de parallellogramregel in inproductruimten: voor alle v en w geldt $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$.

♠ **Huiswerk XII-3.** Laat V de inproductruimte uit Voorbeeld 10.3(iii) zijn. Neem $f(x) = x$ en $g(x) = e^x$.

- (i) Bereken $\langle f, g \rangle$, $\|f\|$, $\|g\|$, $\|f + g\|$.
- (ii) Laat zien dat aan de Cauchy-Schwarz ongelijkheid en aan de driehoeksongelijkheid voldaan wordt.

♠ **Huiswerk XII-4.** Bewijs dat de functies f_n uit Voorbeeld 10.22 voor $n \in \mathbb{Z}$ inderdaad een orthonormaal stelsel vormen.

♠ **Huiswerk XII-5. [Legendre polynomen]**

Laat $V^{(2)}$ de vectorruimte van polynomen met reële coëfficiënten van graad ten hoogste 2 zijn. Maak hier een inproductruimte van door middel van $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$. Laat $v_1 = 1$, $v_2 = x$, $v_3 = x^2$ de standaardbasis voor $V^{(2)}$ zijn.

- (i) Gebruik Gram-Schmidt orthogonalisatie om een orthonormale basis voor $V^{(2)}$ te vinden. (Het resultaat bestaat uit de eerste drie *Legendre polynomen*.)
- (ii) Schrijf het polynoom $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ op de orthonormale basis uit onderdeel (i).
- (iii) Wat is $\|f\|$?
- (iv) Bepaal de projectie van $g(x) = x^3 \in V^{(3)} \supset V^{(2)}$ op $V^{(2)}$.
- (v) Schrijf g als som $g = v + z$ met $v \in V^{(2)}$ en z in het orthogonaal complement hiervan.