Huiswerkopgaven XIII

♠ **Huiswerk XIII-1.** Met M^T geven we de getransponeerde van een matrix M aan, met $\bar{z}$ de complex geconjugeerde van een complex getal z.

(i) Laat zien dat voor een Hermitese vorm H op een complexe vectorruimte V voor elk drietal vectoren v, w_1 en w_2 uit V en elke $\lambda \in \mathbb{C}$ geldt dat $H(v, w_1 + w_2) = H(v, w_1) + H(v, w_2)$ en $H(v, \lambda w_1) = \bar{\lambda} H(v, w_1)$.

(ii) Bewijs dat een complexe $n \times n$ matrix M unitair is dan en slechts dan als de kolommen een orthonormaal stelsel vormen (met betrekking tot het standaard-inproduct).

(iii) Laat zien dat voor $n \times n$ matrices M, N geldt dat $(M + N)^\mathsf{T} = M^\mathsf{T} + N^\mathsf{T}$ en $(M \cdot N)^\mathsf{T} = N^\mathsf{T} M^\mathsf{T}$ (dat laatste door de coëfficiënten op positie i, j links en rechts te vergelijken).

(iv) Veronderstel dat M en N twee Hermitese $n \times n$ matrices zijn. Laat zien dat niet noodzakelijk $M \cdot N$ Hermites is maar wel $M \cdot N + N \cdot M$.

♠ **Huiswerk XIII-2.**

(i) Laat zien dat een $n \times n$ reële matrix orthogonaal is dan en slechts dan als $Q^{-1} = Q^\mathsf{T}$ (de inverse is de getransponeerde) en dat daaruit volgt dat ook de *rijen* van een orthogonale matrix een orthonormaal stelsel vormen.

(ii) Bewijs dat de determinant van een orthogonale matrix ± 1 is.

(iii) Bewijs dat alle (reële) eigenwaarden van een orthogonale matrix ± 1 zijn.

(iv) Geef een voorbeeld van een orthogonale matrix die geen (reële) eigenwaarden heeft. [Hint: opgave 3(iii)]

(v) Bewijs dat als Q, R orthogonale matrices zijn, ook Q^{-1} en $Q \cdot R$ orthogonale matrices zijn. [Hieruit volgt dat de orthogonale matrices een *ondergroep* van de groep van inverteerbare matrices vormen!]

♠ **Huiswerk XIII-3.** In deze opgave beschouwen we orthogonale transformaties van $\mathbb{R}^2$.

(i) Geef de matrix (ten opzichte van de standaardbasis) behorende bij de lineaire transformatie van V die de draaiing over een hoek ϕ geeft (door de beelden van de standaardbasisvectoren te beschouwen).

(ii) Doe hetzelfde voor de lineaire afbeelding die de spiegeling geeft in de lijn door de oorsprong die een hoek ϕ met de oorsprong maakt.

(iii) Bewijs dat een orthogonale 2×2 matrix van de vorm

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \quad \text{of} \quad \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}$$

is, voor reële getallen x, y met $x^2 + y^2 = 1$.

(iv) Laat zien dat een orthogonale transformatie van de $\mathbb{R}^2$ een draaiing of een spiegeling in een lijn is. Hoe kun je aan de determinant de twee gevallen van elkaar onderscheiden (vgl. opgave 2(ii))?

(v) Laat ook zien dat je de spiegeling in een lijn kunt schrijven als samenstelling van een spiegeling in de x-as en een draaiing. Over welke hoek?