
Huiswerkopgaven XIV

♠ **Huiswerk XIV-1.** Geef een voorbeeld van een lineaire transformatie T van de $\mathbb{R}^2$ die wel voldoet aan $T^*T = TT^*$ maar die niet diagonaliseerbaar is.

♠ **Huiswerk XIV-2.** Laat $\mathcal{B}$ de basis van $V = \mathbb{R}^3$ zijn bestaande uit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad M_T^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de matrix voor een lineaire transformatie T van V . Laat zien dat T orthogonaal is, en dat T symmetrisch is, en bepaal een orthonormale basis van V bestaande uit eigenvectoren voor T .

♠ **Huiswerk XIV-3.** Laat het reële lineaire stelsel vergelijkingen $Ax = b$ gegeven zijn door:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

Bepaal een oplossing v voor $AA^*v = b$ en laat zien dat $w = A^*v$ voldoet aan $Ax = b$ en dat voor elke andere oplossing w' geldt dat $\|w'\| \geq \|w\|$.

♠ **Huiswerk XIV-4.** Laat V een eindig-dimensionale vectorruimte over het lichaam K zijn, waarop een inproduct $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is gedefinieerd. Laten S en T lineaire transformaties van V zijn.

- (i) Bewijs: als voor alle $x, y \in V$ geldt dat $\langle Sx, y \rangle = 0$, dan is $S = 0$.
- (ii) Bewijs: als voor alle $x, y \in V$ geldt dat $\langle Sx, y \rangle = \langle Tx, y \rangle$, dan is $S = T$.
- (iii) Veronderstel nu dat $K = \mathbb{C}$ en dat S en T Hermities zijn. Bewijs dat $S \cdot T$ Hermities is dan en slechts dan als $S \cdot T = T \cdot S$.

♠ **Huiswerk XIV-5.** Laat M een $n \times n$ matrix zijn met reële coëfficiënten. We noemen zo'n reële matrix normaal als hij normaal is opgevat als complexe matrix (waarvan de coëfficiënten toevallig reëel zijn).

- (i) Laat zien dat M normaal is dan en slechts dan als $M \cdot M^T = M^T \cdot M$.
- (ii) Laat zien dat M normaal is als M orthogonaal is, en ook als M symmetrisch is.
- (iii) We noemen N *orthogonaal equivalent* met M wanneer er een orthogonale matrix O bestaat met $O^{-1} \cdot M \cdot O = N$. Laat zien dat M normaal is dan en slechts dan als hij orthogonaal equivalent is met een diagonaalmatrix.