Huiswerkopgaven VIII

♠ **Huiswerk VIII-1.** Laat V de vectorruimte $\mathbb{Q}^3$ zijn en $W = \mathbb{Q}^2$.

(i) Laat $\mathcal{B}$ de basis van V zijn bestaande uit de vectoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de duale basis $\mathcal{B}^*$ door voor $i = 1, 2, 3$ aan te geven wat het beeld

$$b_i^* \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

is van de vector met coördinaten x, y, z ten opzichte van de standaardbasis.
Hint: $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$.

(ii) Zij $\mathcal{C}$ de basis van W bestaande uit

$$c_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bepaal net als in (i) de duale basis $\mathcal{C}^*$.

(iii) Laat f de lineaire afbeelding van V naar W zijn die ten opzichte van de standaardbases voor V en W door de matrix

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -5 & \frac{7}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

gegeven wordt. Bepaal ${}^{\mathcal{C}}M_f^{\mathcal{B}}$, de matrix van f ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$ voor V en $\mathcal{C}$ voor W (door de beelden van b_i op de basis $\mathcal{C}$ te schrijven).

(iv) Gebruik de definitie van de getransponeerde f^{T} om $f^{\mathrm{T}}(c_1^*)$ en $f^{\mathrm{T}}(c_2^*)$ te bepalen: daarvoor is het nodig dat je de waarde van de functionaal $f^{\mathrm{T}}(c_1^*)$ op b_1, op b_2, en op b_3 uitrekent, en net zo de waarden van $f^{\mathrm{T}}(c_2^*)$ op b_1, op b_2, en op b_3. Gebruik dat $c_i^*(c_j) = \delta_{ij}$.

(v) Met (iv) kun je nu direct de matrix ${}^{\mathcal{B}^*}M_{f^{\mathrm{T}}}^{\mathcal{C}^*}$ van f^{T} ten opzichte van de de bases $\mathcal{C}^*$ en $\mathcal{B}^*$ opschrijven. Doe dat en laat zien wat het verband met ${}^{\mathcal{C}}M_f^{\mathcal{B}}$ is.

♠ **Huiswerk VIII-2.** Laat V de reële 3-dimensionale vectorruimte $\mathbb{R}^3$ zijn en laat U een vlak door de oorsprong zijn. Steeds is $v + U = \{v + u : u \in U\}$.

(i) Laten v_1 en v_2 vectoren uit V zijn. Bewijs dat voor de nevenklassen $v_1 + U$ en $v_2 + U$ geldt: $v_1 + U = v_2 + U$ dan en slechts dan als $v_1 - v_2 \in U$.

(ii) Laat zien dat hieruit volgt: $v_1 + U = v_2 + U$ of $(v_1 + U) \cap (v_2 + U) = \emptyset$.

(iii) Laat zien dat uit de definities volgt: als $v_1 + U = v_2 + U$ dan geldt ook $(w + U) + (v_1 + U) = (w + U) + (v_2 + U)$, voor $w \in V$. (Optelling hangt niet van keuze representant af)

(iv) Zijn beweringen (i), (ii) of (iii) ook waar als U niet door de oorsprong gaat?

(v) Zijn beweringen (i), (ii) of (iii) ook waar als U een vlak door de oorsprong in de vierdimensionale ruimte $\mathbb{F}_5^4$ over het lichaam van 5 elementen is?

♠ **Huiswerk VIII-3.** [**Uitwendig product** en **normaalvergelijking**]
Laat een vlak V in $\mathbb{R}^3$ gegeven zijn door de vectorvergelijking $\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{q} + \mu\vec{r}$, voor onafhankelijke vectoren $\vec{q}$ en $\vec{r}$ in $\mathbb{R}^3$, met $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Met $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ geven we het standaardinproduct van $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ aan.

(i) Laat zien dat als $\vec{n}$ loodrecht op $\vec{q}$ en op $\vec{r}$ staat (dus $\langle \vec{n}, \vec{q} \rangle = \langle \vec{n}, \vec{r} \rangle = 0$) dat dan $\vec{n}$ loodrecht op $\vec{x} - \vec{p}$ staat voor elke vector $\vec{x}$ met eindpunt in het vlak V.

(ii) Laat omgekeerd zien dat, wanneer $\vec{n}$ loodrecht op $\vec{x} - \vec{p}$ staat voor elke vector $\vec{x}$ met eindpunt in het vlak V, wel moet gelden dat $\vec{n}$ loodrecht op $\vec{q}$ en op $\vec{r}$ staat.

(iii) Laat zien dat de vector $\vec{q} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} q_2 r_3 - q_3 r_2 \\ -q_1 r_3 + q_3 r_1 \\ q_1 r_2 - q_2 r_1 \end{pmatrix}$, die het *uitwendig product* of *uitproduct* of *vector product* van $\vec{q}$ en $\vec{r}$ heet, loodrecht staat op $\vec{q}$ en $\vec{r}$.

(iv) Leid uit het voorgaande af dat de coördinaten van alle $\vec{x}$ met eindpunt in V voldoen aan:

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & q_1 & r_1 \\ x_2 & q_2 & r_2 \\ x_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix}.$$

Deze lineaire vergelijking heet wel een *normaalvergelijking* voor het vlak.

(v) Geef een normaalvergelijking voor het vlak door de punten $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, -1, 1)$ en $C = (1, 1, 1)$.