
Huiswerkopgaven IX

♠ Huiswerk IX-1. [Uitwendig product (vervolg)]

Laat $\vec{a} \times \vec{b}$ het uitwendig product van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zijn als gegeven in Huiswerkopgave VIII-3.

- (i) Bewijs dat over elk lichaam van karakteristiek ongelijk aan 2 uit de eigenschap van determinanten dat verwisseling van twee verschillende kolommen van een vierkante matrix resulteert in vermenigvuldiging van de determinant met -1 volgt dat de determinant nul is wanneer twee kolommen hetzelfde zijn.
- (ii) Laat zien dat voor elk drietal vectoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ uit $\mathbb{R}^3$ geldt dat

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

- (iii) Gebruik (ii) en de eigenschappen van determinanten om te laten zien dat $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, voor elk tweetal vectoren $\vec{a}, \vec{b}$ uit $\mathbb{R}^3$.
- (iv) Idem voor de eigenschappen $\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle$ en $\langle \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle = 0$.
- (v) Bewijs dat $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2$.
- (vi) Gebruik (v) en de eigenschap $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \phi$, waar ϕ de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is, om te laten zien dat $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin \phi$.

♠ **Huiswerk IX-2.** Veronderstel dat T en U beide deelruimten zijn van de L -vectorruimte V . Definieer de lineaire afbeelding $\phi: T \times U \rightarrow V$ door $\phi(t, u) = t - u$ voor $t \in T, u \in U$. Gebruik ϕ om te bewijzen dat $\dim(T + U) + \dim(T \cap U) = \dim T + \dim U$.

♠ **Huiswerk IX-3.** In deze opgave gebruiken we de definitie van het tensorproduct van matrices over een lichaam L als aan het eind van Hoofdstuk 8. Hier zijn steeds A en B vierkante matrices over L van afmetingen $m \times m$ en $n \times n$ respectievelijk.

- (i) Laat zien dat het nemen van het tensorproduct van matrices niet commutatief is.
- (ii) Laat zien dat $A \otimes B = 0$ dan en slechts dan als $A = 0$ of $B = 0$.
- (iii) Laat zien dat $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$ als A en B inverteerbaar zijn.
- (iv) Laat zien dat voor het spoor geldt: $\text{Tr}(A \otimes B) = \text{Tr}(A) \cdot \text{Tr}(B)$.
- (v) Laat zien dat als A alle eigenwaarden $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ heeft in het lichaam L , en evenzo B heeft eigenwaarden $\mu_1, \dots, \mu_n$ in L , dan heeft $A \otimes B$ eigenwaarden $\lambda_i \mu_j \in L$, met $1 \leq i \leq m$ en $1 \leq j \leq n$.