III-1. [eindige kettingbreuken]

(i) Implementeer (in Magma) het kettingbreuk-algoritme voor rationale getallen.

(ii) Schrijf een functie die voor een gegeven rij van wijzergetallen de rij van convergenten oplevert.

(iii) Schrijf een functie die voor gegeven $n \geq 1$ in $\mathbf{Z}$ het getal $c(n) \geq 1$ bepaalt dat als volgt gedefinieerd is:

$$c(n) = \min_{\substack{1 \leq m \leq n \\ \gcd(m,n)=1}} (\max w(m/n)),$$

waar $w(m/n)$ de rij wijzergetallen van de kettingbreuk voor m/n is.

(iv) Probeer, voor gegeven $1 < M < N$ zo snel mogelijk $\max_{M<n\leq N} c(n)$ te bepalen. Bepaal hiermee een tabel van waarden van dit maximum voor de paren $M = k \cdot 10^3$, $N = (k+1) \cdot 10^3$ voor $k = 0, \ldots, 100$, alsmede voor de n waarvoor dit maximum optreedt. [Het onbewezen vermoeden van Zaremba zegt dat er een van n onafhankelijke constante C bestaat zodat $c(n) \leq C$ voor alle n.]

III-2. [sommen van kwadraten] Implementeer Legendre's methode om een priemgetal $p \equiv 1 \bmod 4$ als som van twee kwadraten te schrijven; die methode gaat als volgt. Legendre bewees dat voor zulke p de kettingbreuk van $\sqrt{p}$ altijd *oneven* lengte heeft. Volgens Stelling **1.2.13** is de periode dan $a_1, a_2, \ldots, a_m, a_m, a_{m-1}, \ldots, a_2, a_1, 2a_0$ (met $a_0 = \lfloor\sqrt{p}\rfloor$). Schrijf nu $x_n = (P_n + \sqrt{p})/Q_n$, voor $n \geq 0$, als in de tekst. Dan heeft x_m zuiver periodieke kettingbreuk, met periode

$$a_m, a_{m-1}, \ldots, a_2, a_1, 2a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m,$$

en volgens de stelling van Galois **1.2.12** is ook $x_m = -1/\bar{x}_m$, zodat

$$\frac{P_m + \sqrt{p}}{Q_m} = -\frac{1}{\frac{P_m - \sqrt{p}}{Q_m}} = -\frac{Q_m}{P_m - \sqrt{p}},$$

oftewel: $P_m^2 - p = -Q_m^2$ en $a = P_m, b = Q_m$ is de gezochte oplossing.