

Tentamen Dynamische Systemen

1 juli 2009, 14.00 - 17.00 uur

Begin ieder van de drie hoofdpogaven op een nieuw vel en zet daarop je naam en studentnummer. Je mag gebruik maken van ‘graphical analysis’, ofwel kijken naar het plaatje. Een grafische rekenmachine is niet toegestaan.

We noteren \mathbb{N}^* voor de natuurlijke getallen zonder 0.

Opgave 1

(**Totaal 30 punten**). We bekijken de serie van functies geparametriseerd door $c \in \mathbb{R}$ gedefinieerd door:

$$H_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto (x - c)^2$$

1. (10 punten) Laat zien dat voor $c = -\frac{1}{4}$ en $c = \frac{3}{4}$ bifurcaties op treden en benoem het type bifurcatie.
2. (10 punten) Zij $c_0 < -\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4} < c_1 < \frac{3}{4}$ en $c_2 > \frac{3}{4}$. Laat zien dat H_{c_i} niet topologisch geconjugeerd is met H_{c_j} als $i \neq j$.
3. (5 punten) Bereken de Schwarz-afgeleide

$$SH_c(x) = \frac{H_c'''(x)}{H_c'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{H_c''(x)}{H_c'(x)} \right)^2,$$

en laat zien dat H_c (voor willekeurige c) maar eindig veel aantrekkende periodieke banen heeft. Kun je een expliciete bovengrens voor het aantal aantrekkende periodieke banen geven?

4. (5 punten) Laat zien dat H_c topologisch geconjugeerd is met $Q_{-c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - c$.

Opgave 2

(Totaal 44 punten). Zij $\tau = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$. τ voldoet aan de vergelijking $\tau^2 - \tau - 1 = 0$. In deze opgave beschouwen we de volgende functie:

$$f : [0, \tau] \rightarrow [0, \tau] : x \mapsto \begin{cases} \tau x & 0 \leq x \leq 1 \\ \tau(x-1) & 1 < x \leq \tau. \end{cases}$$

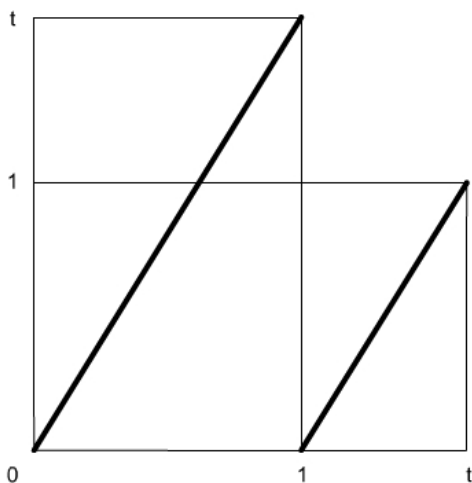


Figure 1: Grafiek van $f(x)$ behorende bij opgave 2. t moet τ zijn.

We definiëren de volgende intervallen $I_0 := [0, 1]$, $I_1 := (1, \tau]$.

Zij verder Σ_2 als in het boek:

$$\Sigma_2 := \{(s_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid s_i \in \{0, 1\}\}.$$

Zij nu Σ' de deelverzameling van Σ_2 die bestaat uit de rijtjes zonder twee opeenvolgende enen, dus formeel:

$$\Sigma' := \{(s_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid s_i \in \{0, 1\}, \quad s_i = 1 \Rightarrow s_{i+1} = 0\}.$$

We beschouwen we de functie:

$$S : [0, \tau] \rightarrow \Sigma_2 : x \mapsto (s_0, s_1, s_2, \dots),$$

met $s_i = k$ als $f^i(x) \in I_k$.

- (4 punten) Bewijs dat het beeld van S in feite bevat is in Σ' .

2. (4 punten) Bewijs dat S injectief is, dus als $S(x) = S(y)$ dan $x = y$.
 HINT: laat zien dat voor z met $x \leq z \leq y$ geldt dat $S(z) = S(x) = S(y)$. Leid hieruit een tegenspraak af als $x \neq y$.

We definiëren de functie T door:

$$T : \Sigma' \rightarrow [0, \tau] : (s_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_i}{\tau^i}.$$

3. (4 punten) Laat zien dat het beeld van T inderdaad bevat is in $[0, \tau]$.
4. (4 punten) Laat zien dat T niet injectief is. HINT: bekijk het inverse beeld van 1.

We leggen een metriek d op Σ' door

$$d((s_i)_{i \in \mathbb{N}}, (t_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_i - t_i}{\tau^i} \right|,$$

en benadrukken dat de absolute waarde buiten de som staat. A priori is het misschien niet duidelijk dat dit een metriek is, maar dit mag je als aanname voor de opgaven gebruiken. De metriek is zo gekozen dat

$$d((s_i)_{i \in \mathbb{N}}, (t_i)_{i \in \mathbb{N}}) = |T((s_i)_{i \in \mathbb{N}}) - T((t_i)_{i \in \mathbb{N}})|,$$

waaruit volgt dat T continu is. Bovendien geldt dat T surjectief is. Dit mag je voor de volgende opgaven gebruiken.

Zij $\sigma : \Sigma' \rightarrow \Sigma' : (s_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto (s_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$ de shift. We hebben nu de afbeeldingen:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma' & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma' \\ \downarrow T & & \downarrow T \\ [0, \tau] & \xrightarrow{f} & [0, \tau]. \end{array}$$

5. (8 punten) Laat door middel van een directe berekening zien dat $f \circ T((s_i)_{i \in \mathbb{N}}) = T \circ \sigma((s_i)_{i \in \mathbb{N}})$ voor alle $(s_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \Sigma' \setminus \{(10000\dots)\}$. HINT: laat beide afbeeldingen los op een rij $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en beschouw de gevallen $s_0 = 0$ en $s_0 = 1$ apart.

6. (4 punten) Bewijs het volgende: zij $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}, (t_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \Sigma'$ en stel dat $s_i = t_i$ voor alle i met $0 \leq i \leq N$. Dan $d((s_i)_{i \in \mathbb{N}}, (t_i)_{i \in \mathbb{N}}) \leq \frac{1}{\tau^{N-1}}$.
7. (8 punten) Laat zien dat de periodieke punten van σ dicht liggen in Σ' .
8. (8 punten) Laat zien dat de periodieke punten van f dicht liggen in $[0, \tau]$.

Opgave 3

(**Totaal 16 punten**). We beschouwen de volgende functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, welke buiten het interval $[0, 6]$ gedefinieerd is door:

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \forall x < 0 \\ 0 & \forall x > 6 \end{cases}$$

en binnen het interval $[0, 6]$ door de stuksgewijs lineaire functie:

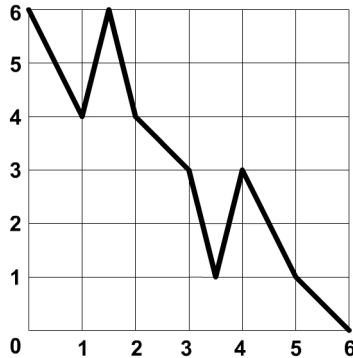


Figure 2: Grafiek van $f(x)$ op $[0, 6]$ behorende bij opgave 3.

1. (5 punten) Laat zien dat de functie precies 1 vast punt heeft en dat alle andere periodieke punten even priemperiode hebben.
2. (11 punten) Laat zien dat er voor iedere even $n \in \mathbb{N}^*$ een punt $x \in \mathbb{R}$ is, zodanig dat x periodiek is van priemperiode n . HINT: gebruik de stelling van Sarkovskii.