

# Tentamen Dynamische Systemen

26 augustus 2009, 14.00u - 17.00u, HG 00.071

Begin ieder van de drie hoofdpogaven op een nieuw vel en zet daarop je naam en studentnummer. Je mag gebruik maken van 'graphical analysis', ofwel kijken naar het plaatje. Een grafische rekenmachine is niet toegestaan.

## Opgave 1

We bekijken de serie van functies geparametriseerd door  $c \in \mathbb{R}$  gedefinieerd door:

$$A_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[3]{x - c}.$$

Zij  $\alpha = \frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{9}\sqrt{3}$ .

1. Laat zien dat er bij  $c = \alpha$  een bifurcatie optreedt te  $x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$  en benoem het type bifurcatie.
2. Laat zien dat er bij  $c = -\alpha$  een bifurcatie optreedt. Benoem het type bifurcatie.
3. Zij  $-\alpha < c_0 < \alpha$  en  $\alpha < c_1$ . Bewijs dat  $A_{c_0}$  en  $A_{c_1}$  niet topologisch geconjugeerd zijn.
4. Bewijs dat voor alle  $c \in \mathbb{R}$ ,  $A_c$  topologisch geconjugeerd is met  $A_{-c}$ .

## Opgave 2

Beschouw de stuksgewijs lineaire functie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gedefinieerd door:

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{als } x \in (-\infty, \frac{1}{3}] \\ 3 - 3x & \text{als } x \in (\frac{1}{3}, \infty). \end{cases}$$

Zie ook de volgende figuur.

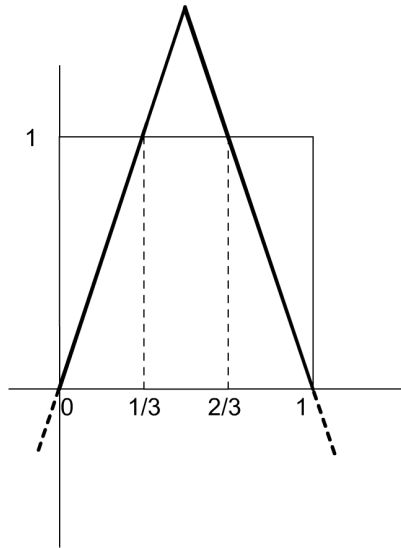


Figure 1: Grafiek van  $f(x)$  behorende bij opgave 2.

We definiëren:

$$\Lambda := \{x \in [0, 1] \mid \forall n \in \mathbb{N} f^n(x)\}.$$

1. Laat zien dat  $\Lambda$  gesloten is. Bijvoorbeeld door het volgende te bewijzen.  
Als een rij  $x_n \in \Lambda$  naar  $x \in [0, 1]$  convergeert, dan  $x \in \Lambda$ .

Net als in het boek, zij  $\Sigma_2$  de verzameling van oneindige rijtjes van nullen en enen:

$$\Sigma_2 := \{(s_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid s_i \in \{0, 1\}\},$$

en zij  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2 : (s_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto (s_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$  de shift afbeelding.

Voor  $n \in \mathbb{N}^*$  definiëren de functie  $a_n : \Sigma_2 \rightarrow \{0, 1\}$  die aangeeft of er een even of oneven aantal enen vóór de  $n$ -de plek in een rijtje  $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$  staan. Formeel:

$$a_n : \Sigma_2 \rightarrow \{0, 1\} : (s_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{als } \sum_{k=0}^{n-1} s_k \text{ is even.} \\ 1 & \text{als } \sum_{k=0}^{n-1} s_k \text{ is oneven.} \end{cases}$$

Verder spreken we af  $a_0((s_i)_{i \in \mathbb{N}}) = 0$ .

Zij nu:

$$T : \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R} : (s_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|s_n - a_n((s_i)_{i \in \mathbb{N}})|}{3^n}.$$

2. Laat zien dat het beeld van  $T$  bevat is in het interval  $[0, 1]$ .
3. Laat zien dat onderstaand diagram commuteert. Dat wil zeggen, laat zien dat  $f \circ T = T \circ \sigma$ .

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_2 & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_2 \\ \downarrow T & & \downarrow T \\ [0, 1] & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \end{array}$$

4. Concludeer dat  $T$  waarden in  $\Lambda$  aanneemt.

We leggen een metriek op  $\Sigma_2$  door:

$$d((s_i)_{i \in \mathbb{N}}, (t_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|s_n - t_n|}{2^n}.$$

Het boek geeft een bewijs van het volgende. Zij  $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}, (t_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \Sigma_2$  en stel dat  $s_i = t_i$  voor alle  $i$  met  $0 \leq i \leq N$ . Dan  $d((s_i)_{i \in \mathbb{N}}, (t_i)_{i \in \mathbb{N}}) \leq \frac{1}{2^N}$ .

5. Geef een bewijs van het feit dat  $\sigma$  een dichte baan heeft.

Men kan bewijzen dat  $T : \Sigma_2 \rightarrow \Lambda$  continu en surjectief is. Dit mag je gebruiken voor de volgende opgave. Pas wel op! Het is vanaf dit punt niet duidelijk ofdat  $T : \Sigma_2 \rightarrow \Lambda$  een homeomorfisme is.

6. Laat zien dat  $f : \Lambda \rightarrow \Lambda$  topologisch transitief is. HINT: het volstaat te laten zien dat  $f : \Lambda \rightarrow \Lambda$  een dichte baan heeft.

### Opgave 3

Beschouw de stuksgewijs lineaire functie  $f : [0, 3] \rightarrow [0, 3]$  gedefinieerd door:

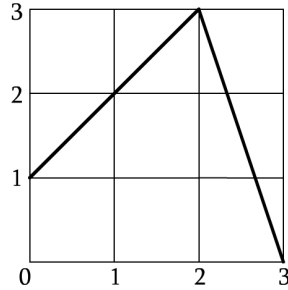


Figure 2: Grafiek van  $f(x)$  behorende bij opgave 3.

1. Laat zien dat er een periodiek punt van priemperiode 37 bestaat.

Men kan bewijzen het volgende bewijzen. Als  $I \subseteq [0, 3]$  een open interval is dan is er een  $n \in \mathbb{N}$  zonanig  $f^n(I) = [0, 3]$ . Dit mag je als aanname voor de volgende opgaven gebruiken.

2. Bewijs dat  $f$  topologisch transitief is.
3. Laat zien dat de periodieke punten van  $f$  dicht liggen in het interval  $[0, 3]$ .