

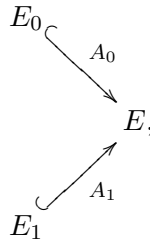
# (Her)tentamen Inleiding Functionaal Analyse (WB062B)

10 mei 2010

Het is bij alle opgaven toegestaan gebruik te maken van het Keuze-Axioma, alsmede alle resultaten bewezen in de syllabus tenzij expliciet gevraagd. We gebruiken de notatie  $E'$  voor de Banach dual van een genormeerde ruimte  $E$ . Het tentamen bestaat uit twee pagina's. Succes!

## 1. Banachruimte, begrensde afbeeldingen

Gegeven zijn Banachruimten  $E_0, E_1$  en  $E$ , met respectievelijke normen  $\|\cdot\|_{E_0}, \|\cdot\|_{E_1}, \|\cdot\|_E$ . Gegeven zijn verder twee begrensde, injectieve lineaire afbeeldingen  $A_0 : E_0 \rightarrow E$ ,  $A_1 : E_1 \rightarrow E$ . Zie de volgende figuur.



Zij  $B$  de lineaire deelruimte van  $E$  gegeven door de intersectie  $A_0(E_0) \cap A_1(E_1)$ . Voor  $y \in B$ , definiëren we  $\|y\|_B = \max\{\|x_0\|_{E_0}, \|x_1\|_{E_1}\}$ , waar  $x_i \in E_i$  het (unieke) element is zodanig dat  $A_i x_i = y$ .

- (a) Laat zien dat  $\|\cdot\|_B$  aan de driehoeksongelijkheid voldoet.

Het is nu duidelijk dat  $\|\cdot\|_B$  een norm is op  $B$ .

- (b) Laat zien dat  $B$  met de  $\|\cdot\|_B$ -norm een Banach ruimte is.
- (c) We noteren  $\iota$  voor de inclusie van  $B$  in  $E$ , dus  $\iota : B \rightarrow E : x \mapsto x$ . Laat zien dat  $\iota$  continu is ten opzichte van de  $\|\cdot\|_B$ -norm op  $B$  en de  $\|\cdot\|_E$ -norm op  $E$ .
- (d) Stel dat  $A_0$  norm-decreasing is, dat wil zeggen dat voor alle  $x \in E_0$ ,  $\|A_0 x\|_E \leq \|x\|_{E_0}$ . Bewijs dat de duale afbeelding  $A'_0 : E' \rightarrow E'_0 : f \mapsto f \circ A_0$  norm-decreasing is (dus laat zien dat  $\|A'_0 f\|_{E'_0} \leq \|f\|_{E'}$ ).

## 2. Alaoglu, Hahn-Banach en Closed-Graph

- (a) Zij  $E$  een separabele Banach ruimte en zij  $x_0 \in E$ . Definieer  $X = \{f \in E' \mid f(x_0) = 0, \|f\| \leq 37\}$ . Laat zien dat  $X$  w'-compact is.
- (b) Zij  $E$  een separabele Banach ruimte en zij  $x, y \in E$  lineair onafhankelijk. Bewijs dat er een  $f \in E'$  bestaat zodanig dat  $f(x) = 0$  en  $f(y) = 1$ .
- (c) Zij  $E$  en  $F$  Banach ruimten en zij  $A : E \rightarrow F$  een lineaire afbeelding. Laat zien dat de volgende twee uitspraken equivalent zijn.
- Als  $x \in E$  en  $x_i$  een rijtje in  $E$  is, zodanig dat  $\lim_i \|x_i - x\| = 0$ , dan is  $Ax_i$  w-convergent naar  $Ax$  (dit betekent dat  $A$  continu is ten opzichte van de norm-topologie op  $E$  en de w-topologie op  $F$ ).
  - $A$  is begrensd.

### 3. Legendre polynomen

Gegeven het feit dat  $C[-1, 1]$  dicht ligt in  $L^2[-1, 1]$ , volgt uit de Weierstrass Approximatiestelling dat de polynomen dicht liggen in  $L^2[-1, 1]$ . Vervolgens geeft Gram-Schmidt orthogonalisatie toegepast op het rijtje functies  $1, \chi, \chi^2, \dots$  op  $[-1, 1]$  (met  $\chi : x \mapsto x$ ) een orthonormale basis  $f_0, f_1, f_2, \dots$  in de Hilbertruimte  $L^2[-1, 1]$ . Elke  $f_n$  is een polynoom van graad  $n$ :

$$f_0 = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad f_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\chi, \quad f_2 = \sqrt{\frac{5}{8}}(3\chi^2 - 1), \quad \dots,$$

welke zijn gerelateerd aan de *Legendre polynomen*  $P_0, P_1, P_2, \dots$  via

$$P_n = \left(\frac{2}{2n+1}\right)^{\frac{1}{2}} f_n$$

- (a) Laat zien: als  $q_0, q_1, q_2, \dots$  een rijtje is van polynomen zodat de graad van  $q_n$  precies  $n$  is en dat  $q_n \perp q_k$  voor alle  $n \neq k$ , dan bestaan er getallen  $\alpha_0, \alpha_1, \dots$  met  $q_n = \alpha_n P_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).
- (b) Met  $D$  noteren we differentiatie, gezien als afbeelding van de ruimte van alle polynomen op  $[-1, 1]$  naar zichzelf. Definieer de volgende polynomen van graad  $n$ :

$$q_n := D^n ((\chi^2 - 1)^n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

- i. Laat zien dat als  $i, n \in \mathbb{N}$  en  $i < n$ , dan is  $D^i ((\chi^2 - 1)^n)$  nul voor  $x = \pm 1$ .
- ii. Gebruik partiële integratie om aan te tonen dat voor alle  $n, k \in \{0, 1, 2, \dots\}$  geldt:

$$\langle q_n, q_k \rangle = (-1)^n \langle (\chi^2 - 1)^n, D^{k+n} ((\chi^2 - 1)^k) \rangle,$$

en dat  $q_n \perp q_k$  als  $n > k$ .

- iii. Gebruik dezelfde gelijkheid en nogmaals partiële integratie om aan te tonen dat voor alle  $n$  geldt:

$$\langle q_n, q_n \rangle = (-1)^n (2n)! \langle (\chi - 1)^n, (\chi + 1)^n \rangle = \frac{2}{2n+1} (n! 2^n)^2.$$

- (c) Merk op dat de coëfficiënten van  $\chi^n$  in  $f_n$ , in  $P_n$  en in  $q_n$  allemaal positief zijn. Deduceer nu de *Rodrigues' formule*:

$$P_n = \frac{1}{n! 2^n} D^n ((\chi^2 - 1)^n), \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

- (d) Bewijs dat  $P_n(1) = 1$  voor alle  $n$ .