

# Tentamen Inleiding Functionaal Analyse (WB062B)

28 juni 2011

Het is bij alle opgaven toegestaan gebruik te maken van het Keuze-Axioma, alsmede alle resultaten bewezen in de syllabus tenzij expliciet gevraagd. Het tentamen bestaat uit één pagina. Succes!

## 1. Banachruimten en hun dualen

Zij  $E$  een separabele Banachruimte. Zij  $E'$  zijn duale en  $E''$  zijn dubbele duale. Definieer de deelruimte  $F \subseteq E''$  als

$$F = \{\varphi \in E'' \mid \varphi \text{ is } w'\text{-continu}\}.$$

Hierbij is  $\varphi$   $w'$ -continu als geldt dat als  $f_n$  een rij is in  $E'$  die  $w'$  naar  $f$  convergeert, dan convergeert  $\varphi(f_n)$  naar  $\varphi(f)$ .

- Laat zien dat  $E \subseteq F$ . Hier wordt  $x \in E$  geïdentificeerd met de functionaal  $\hat{x}(f) = f(x)$ ,  $f \in E'$ .
- Laat zien dat  $F$  een Banachruimte is. HINT: in de loop van het bewijs komt het Principle of Uniform Boundedness waarschijnlijk van pas.
- Voor het geval  $E = c_0$ . Geef een voorbeeld van een element in  $E''$  dat niet in  $F$  ligt.

Opmerking: Je kunt bewijzen dat in feite  $E = F$ . Dit doen we hier niet, en je mag dit resultaat ook niet gebruiken. Het kan wel helpen bij onderdeel 1c.

## 2. Hahn-Banach, Alaoglu en Closed-Graph

- Zij  $E$  een Banachruimte met de Hahn-Banach eigenschap. Zij  $F$  een gesloten lineaire deelruimte van  $E$  en zij  $\varphi : F \rightarrow l^\infty$  een begrensde lineaire afbeelding (let op dat het bereik van  $\varphi$  in  $l^\infty$  ligt en niet in  $\mathbb{C}$ ). Laat zien dat er een afbeelding  $\tilde{\varphi} : E \rightarrow l^\infty$  bestaat zodanig dat voor  $x \in F$ ,  $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$  en bovendien  $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$ .
- Zij  $E = C([0, 1])$ . Vanwege de Stone-Weierstrass stelling is  $E$  separabel. We definiëren  $X = \{\omega \in E' \mid \omega(fg) = \omega(f)\omega(g)\}$ . Laat zien dat  $X$   $w'$ -compact is.
- Zij  $X, Y$  en  $Z$  Banachruimtes. Stel  $T : X \rightarrow Y$  is een lineaire afbeelding en  $S : Y \rightarrow Z$  is een injectieve, lineaire en begrensde afbeelding zodat  $ST : X \rightarrow Z$  begrensd is. Bewijs:  $T$  is begrensd.

## 3. Hilbertruimten

Zij  $E$  een Hilbertruimte en zij  $A \in L(E)$ .

- Laat zien dat  $\|A^*A\| = \|A\|^2$ .

We noteren de kern en het bereik van  $A$  respectievelijk als

$$\text{Ker}(A) = \{x \in E : Ax = 0\}; \quad \text{Ran}(A) = \{y \in E : y = Ax, x \in E\}.$$

- Bewijs dat  $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^*A)$  en  $\text{Ran}(A) = \text{Ran}(AA^*)$ . HINT: Bewijs dat  $\text{Ker}(A) = \text{Ran}(A^*)^\perp$ .
- Bewijs dat  $A^2 = 0$  dan en slechts dan als  $A^*A^2A^* = 0$ .
- Zij  $x \in E$  en zij  $D \subseteq E$  een gesloten lineaire deelruimte. Laat zien dat er vectoren  $x_1, x_2 \in E$  zijn zodanig dat  $x = x_1 + x_2$  en zodanig dat voor alle  $y \in D$  geldt  $\langle x_1, y \rangle = 0$  en  $\langle x_2, y \rangle = \langle x, y \rangle$ .