Tentamen Dynamische Systemen

29 juni 2011

Begin ieder van de drie hoofdopgaven op een nieuw vel en zet daarop je naam en studentnummer. Daar waar een plaatje is gegeven, mag je gebruik maken van 'graphical analysis', ofwel kijken naar het plaatje. Anders niet, tenzij dit anders aangegeven is. Resultaten uit het boek 'An introduction to chaotic dynamical systems' van Robert L. Devaney mogen gebruikt worden, tenzij deze expliciet gevraagd worden. Een grafische rekenmachine is niet toegestaan.

Opgave 1

Beschouw de afbeelding $f : S^1 \to S^1 : e^{i\theta} \mapsto e^{4i\theta}$. Hierbij is S^1 de eenheidscirkel in het complexe vlak $\mathbb{C}$ bestaande uit punten van de vorm $e^{i\theta}$. De afbeelding f verviervoudigt dus de hoek van een punt.

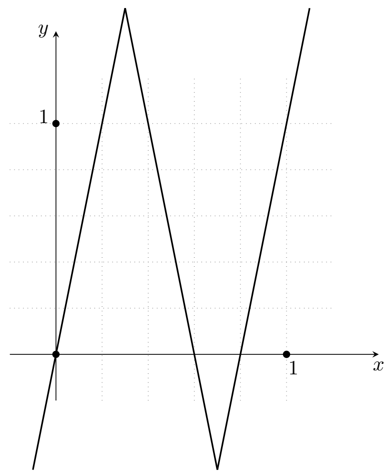
We weten dat het dynamische systeem dat door f wordt gegeven chaotisch is. De topologische transitiviteit bijvoorbeeld volgt uit het feit dat er voor elk segment I van de cirkel S^1 een n is zodat $f^n(I) = S^n$.

Beschouw nu $g : [-1, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto 8x^4 - 8x^2 + 1$. Er geldt $g([-1, 1]) = [-1, 1]$. Met behulp van de chaos van f zullen we laten zien dat de afbeelding $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$ een chaotisch dynamisch systeem geeft. Zij $h : S^1 \to [-1, 1] : e^{i\theta} \mapsto \cos(\theta)$. Merk op dat h continu is maar niet bijectief.

(a) **(5ptn)** Laat zien dat $h \circ f = g \circ h$.
ANTWOORD: Pas twee keer de formule $\cos^2\theta = 2\cos\theta - 1$ toe. Of laat het op andere wijze zien.

(b) **(10ptn)** Laat zien dat g gevoelige afhankelijkheid van beginvoorwaarden heeft.
ANTWOORD: Zij $U \subset [-1, 1]$ open en zij V open in S^1 zo dat $h(V) = U$. Deze V bevat een interval en na n keer toepassen van f verkrijgen we de hele cirkel. Nu h toepassen laat zien dat g n keer toegepast op U het interval [-1,1] teruggeeft. Hier volgt de bewering uit.

(c) **(10ptn)** Laat zien dat de periodieke punten van g dicht liggen in $[-1, 1]$.
ANTWOORD: Zij $x \in [-1, 1]$ en zij U en V als boven. In V vinden we een f-periodiek punt s. Nu is $h(s)$ periodiek en het ligt in U.



Figuur 1: De grafiek van f.

Opgave 2

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de functie gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} 5x & \text{als } x \leq \frac{3}{10}, \\ -5x + 3 & \text{als } \frac{3}{10} \leq x \leq \frac{7}{10}, \\ 5x - 4 & \text{als } x \geq \frac{7}{10}. \end{cases} \tag{1}$$

In Figuur 1 is de grafiek van f afgebeeld. In deze opgave zullen we de dynamica van f op de verzameling

$$\Lambda = \{x \in [0,1] | \forall n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in [0,1]\} \tag{2}$$

bestuderen door ze in verband te brengen met een eenvoudiger dynamisch systeem.

Hiertoe defniëren we de ruimte Σ_3 van rijtjes bestaande uit nullen, enen en tweeën, d.w.z.

$$\Sigma_3 := \{\mathbf{s} = (s_0 s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots) | s_i \in \{0, 1, 2\}\} \tag{3}$$

en de afbeelding $\sigma : \Sigma_3 \to \Sigma_3 : (s_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto (s_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$. Op Σ_3 is er de metriek

$$d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{3^i}. \tag{4}$$

Voor de volgende twee deelvragen mag je gebruik maken van het volgende feit. Zij $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \Sigma_3$ met $s_i = t_i$ voor $i = 0, 1, \ldots, n$. Voor de afstand tussen $\mathbf{s}$ en $\mathbf{t}$ geldt dan de afschatting $d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \leq 3^{-n}$. Indien geldt dat $d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) < 3^{-n}$ dan volgt dat $s_i = t_i$ voor $i = 0, 1, \ldots, n$.

(a) **(10ptn)** Laat zien dat σ continu is.
Antwoord: Zij $\mathbf{s} \in \Sigma_3$ en zij $\epsilon > 0$ willekeurig. Zij $n \in \mathbb{N}$ zo dat $3^{-n} \leq \epsilon$. Zij $0 < \delta < 3^{-n-1}$. De punten $\mathbf{t}$ op afstand $< 3^{-n-1}$ hebben $s_i = t_i$ voor $i = 0, 1, \ldots, n+1$. Uit bovenstaand feit volgt dat $d(\sigma(\mathbf{s}), \sigma(\mathbf{t})) \leq 3^{-n} < \epsilon$.

(b) **(10ptn)** Laat zien dat er een dichte baan van σ in Σ_3 bestaat.
Antwoord: Zij $\mathbf{s}_0 = (012000102101112202122\ldots)$, dwz. steeds alle mogelijkheden met één digit, alle mogelijkheden met twee digits etc. Gegeven een punt $\mathbf{s} \in \Sigma_3$ en een $\epsilon > 0$ willekeurig, zij $n \in \mathbb{N}$ zo dat $3^{-n} < \epsilon$. Pas σ nu zo vaak toe op $\mathbf{s}_0$ dat de eerste n digits overeenkomen met die van $\mathbf{s}$. Dan is $d(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0) \leq 3^{-n} < \epsilon$.

Om de twee dynamische systemen met elkaar in verband te brengen definiëren we de volgende intervallen:

$$I_0 = [0, \frac{1}{5}], \quad I_1 = [\frac{2}{5}, \frac{3}{5}] \quad \text{en} \quad I_2 = [\frac{4}{5}, 1]. \tag{5}$$

en de afbeelding $S : \Lambda \to \Sigma_3$ waarbij $S(x) = (s_0 s_1 s_2 \ldots)$ en s_i gegeven wordt door $f^i(x) \in I_{s_i}$.

(c) **(10ptn)** Laat zien dat S injectief is.
Antwoord: Zij $x \leq y$ en veronderstel dat $S(x) = S(y)$. Zij $z \in [x, y]$. We zullen laten zien dat $S(z) = S(x)$. Definiëer $S(x) = (s_0 s_1 s_2 \ldots)$ en $S(z) = (u_0 u_1 u_2 \ldots)$ en $S(y) = (t_0 t_1 t_2 \ldots)$. Omdat $x, y \in I_{s_0}$ is ook $z \in I_{s_0}$ dus $s_0 = u_0$. Bovendien ligt $f(z)$ tussen $f(x)$ en $f(y)$ in omdat f op het interval I_{s_0} strikt stijgend/dalend is. Onderstel nu dat we hebben bewezen dat voor zekere $n \geq 0$ geldt dat $s_n = u_n$ en dat $f^{n+1}(z)$ tussen $f^{n+1}(x)$ en $f^{n+1}(y)$ in ligt. Omdat $s_{n+1} = t_{n+1}$ liggen $f^{n+1}(x)$ en $f^{n+1}(y)$ in $I_{s_{n+1}}$. Er volgt nu dat $s_{n+1} = u_{n+1}$ en $f^{n+2}(z)$ ligt tussen $f^{n+2}(x)$ en $f^{n+2}(y)$ omdat f strikt stijgend/dalend is op $I_{s_{n+1}}$. We hebben met inductie bewezen dat $S(x) = S(z)$. Het interval $[x, y] \subset I_{s_0}$ wordt 5 keer zo groot na toepassing van f. Maar het interval $f^n([x, y])$ is ook steeds een deelinterval van $I_{s_{n+1}}$ wegens wat we zoëven bewezen hebben. Hieruit concuderen we dat de lengte van $[x, y]$ nul moet zijn, d.w.z. $y - x = 0$.

(d) **(5ptn)** Laat zien dat $S \circ f|_\Lambda = \sigma \circ S$.
Antwoord: Zij $S(x) = \mathbf{s} = (s_0 \ldots)$. Nu is $\sigma(\mathbf{s}) = (s_1, \ldots)$ en $S(f(x)) = (t_0 \ldots)$. Maar t_n wordt bepaald door $f^n(f(x)) = f^{n+1}(x) \in I_{t_n}$ zodat $t_n = s_{n+1}$ waaruit volgt dat $S(f(x)) = (s_1 \ldots)$.

Opgave 3

We beschouwen de familie $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ van functies

$$f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \lambda \arctan(x) \tag{6}$$

en de familie $\{g_\mu\}_{\mu \in \mathbb{R}}$ van functies

$$g_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + (2-\mu)x - 2\mu = (x+2)(x-\mu). \tag{7}$$

(a) **(10ptn)** Teken een plaatje van de grafiek van f_{-1}. Laat zien dat $\lambda = -1$ een bifurcatiepunt is en benoem het type bifurcatie.
ANTWOORD: Pas een stelling toe uit het leerboek.

(b) **(10ptn)** Teken een plaatje van de grafiek van g_{-2}. Bereken de twee zadel-bifurcatiepunten μ_1 en μ_2.
ANTWOORD: Er geldt dat $f_\mu(x) = x$ een oplossing heeft als de vergelijking $x^2 + (1-\mu)x - 2\mu = 0$ reële oplossingen heeft. Daarvan is sprake als de discriminant $D_\mu = \mu^2 + 6\mu + 1 \geq 0$. Hiervan is sprake zodra $\mu \leq -3 - \sqrt{8} = \mu_1$ of $\mu \geq -3 + \sqrt{8} = \mu_2$.

(c) **(10ptn)** Laat zien dat g_{-2} niet topologisch geconjugeerd kan zijn met g_{-10} en ook niet met g_{10}.
ANTWOORD: Omdat $-10 < \mu_1 < -2 < \mu_2 < 10$ zien we dat zowel g_{-10} als g_{10} twee vaste punten heeft terwijl g_{-2} er geen heeft.