Tentamen Dynamische Systemen

24 augustus 2011

Begin ieder van de drie hoofdopgaven op een nieuw vel en zet daarop je naam en studentnummer. Daar waar een plaatje is gegeven, mag je gebruik maken van 'graphical analysis', ofwel kijken naar het plaatje. Anders niet, tenzij dit anders aangegeven is. Resultaten uit het boek 'An introduction to chaotic dynamical systems' van Robert L. Devaney mogen gebruikt worden, tenzij deze expliciet gevraagd worden. Een grafische rekenmachine is niet toegestaan.

Opgave 1: Periodieke punten van functies

1. **(10ptn)** Zij gegeven een bijectieve functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zij $x \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}$ zodanig dat $f^n(x) = x$ en $f^m(x) = x$. Zij $k = \text{ggd}(m, n)$. Bewijs dat $f^k(x) = x$.

   OPMERKING: Als je gebruik maakt van de bijectiviteit van f, geef dan expliciet aan waar je dat doet! Het resultaat is ook waar voor niet bijectieve f, maar dit hoef je niet per sé te bewijzen.

2. **(5ptn)** Zij f, x, m, n en k als in de vorige opgave. Bewijs of geef een tegenvoorbeeld: k is de priemperiode van x.

3. **(5ptn)** Stel dat $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu is en een periodiek punt heeft van priemperiode 2011. Laat zien dat g een periodieke punt heeft van priemperiode $2012, 2013, 2014, \ldots$. Geef daartoe expliciet de ordening die gebruikt wordt voor Sarkovskii's stelling.

Opgave 2: Symbolische dynamica

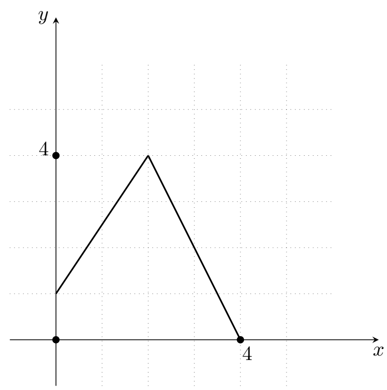
Zij Σ_2 als in het boek. Dus Σ_2 bestaat uit oneindige rijtjes van 0-en en 1-en. Dus formeel:

$$\Sigma_2 = \{(s_0, s_1, s_2, \ldots) \mid s_i \in \{0, 1\}\}.$$

We definieren de metriek d op Σ_2 als in het boek:

$$d((s_0, s_1, s_2, \ldots), (t_0, t_1, t_2, \ldots)) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Het boek geeft het volgende lemma:



Figuur 1: De grafiek van f.

Lemma 1. *Zij* $\mathbf{s} = (s_0, s_1, s_2, \ldots), \mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \ldots) \in \Sigma_2$ *en* $n \in \mathbb{N}$. *Als* $s_i = t_i$ *voor alle* $0 \leq i \leq n$, *dan* $d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \leq \frac{1}{2^n}$. *Andersom, als* $d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) < \frac{1}{2^n}$, *dan* $s_i = t_i$ *voor alle* $0 \leq i \leq n$.

1. **(10ptn)** Geef een bewijs van dit lemma.

We definieren Σ' als de deelverzameling van rijtjes in Σ_2 waarvoor geldt dat als er twee 0-en naast elkaar staan, dan is het volgende getal een 1. Formeel:

$$\Sigma' = \{(s_0, s_1, s_2, \ldots) \in \Sigma_2 \mid \forall i \in \mathbb{N} : (s_i = s_{i+1} = 0 \Rightarrow s_{i+2} = 1)\}.$$

Zij $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2 : (s_0, s_1, s_2, \ldots) \mapsto (s_1, s_2, \ldots)$ de shift afbeelding. Het is duidelijk dat σ beperkt kan worden tot een afbeelding $\Sigma' \to \Sigma'$.

2. **(5ptn)** Geef een voorbeeld van twee rijtjes $(s_0, s_1, s_2, \ldots), (t_0, t_1, t_2, \ldots) \in \Sigma'$ waarvoor $d((s_0, s_1, s_2, \ldots), (t_0, t_1, t_2, \ldots)) = 2$. Let op: zorg dat de rijtjes niet alleen in Σ_2 zitten.

3. **(10ptn)** Laat zien dat Σ' een gesloten deelverzameling is van Σ_2.

4. **(10ptn)** Laat zien dat de periodieke punten van $\sigma : \Sigma' \to \Sigma'$ dicht liggen in Σ'.

We bekijken nu de functie

$$f : [0, 4] \to [0, 4] : x \mapsto \begin{cases} 1 + \frac{3}{2}x & \text{als } 0 \leq x < 2, \\ 8 - 2x & \text{als } 2 \leq x \leq 4, \end{cases}$$

waarvan de grafiek is afgebeeld in Figuur 1. Zij $I_0 = [0, 2)$ en zij $I_1 = [2, 4]$. Zij $S : [0, 4] \to \Sigma_2$ gegeven door $S(x) = (s_0, s_1, s_2, \ldots)$, waarbij $s_i = k$ als $f^i(x) \in I_k$. De functie S is continu. Dit is niet triviaal, maar mag je wel gebruiken.

5. **(10ptn)** Laat zien dat het beeld van S in Σ' ligt.

6. **(5ptn)** Laat zien dat $S \circ f = \sigma \circ S$.

Opgave 3: Bifurcaties

Beschouw de functie:

$$f_\lambda(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \lambda.$$

1. **(10ptn)** Men kan precies maken dat er voor zekere $\lambda < -1$ een bifurcatie optreedt van één van de twee bekende types: de 'saddle-node bifurcatie' of de 'period-doubling bifrucatie'. Geef aan welke van de twee bifurcaties optreedt en beargumenteer je antwoord met behulp van een grafiek schets. Je hoeft niet noodzakelijk het bifurcatiepunt uit te rekenen.

2. **(10ptn)** Voor zekere $\lambda > -1$ treedt een andere bifurcatie op. Geef de waarde van deze λ, geef de bijbehorende waarde van het vaste punt x waarin de bifurcatie optreedt en benoem het type bifurcatie.