De priemgetalstelling

Martijn Caspers, Radboud Universiteit Nijmegen

Ouderdag, 5 februari 2010

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14,

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25,

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28,

1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221,

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18,

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25,

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28,

1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221,

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18,

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33,

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28,

1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221,

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18,

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33,

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45,

1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221,

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18,

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33,

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45,

1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221, 1113213211

Voor sommige rijen kun je een **formule** geven.

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, $2 \times n$

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33,

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45,

1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221, 1113213211

Voor sommige rijen kun je een **formule** geven.

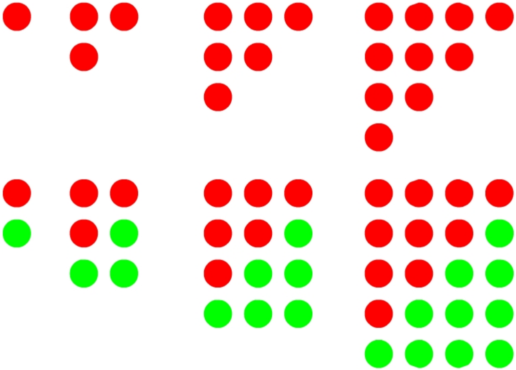
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, $2 \times n$

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, $1 + 4 \times n$

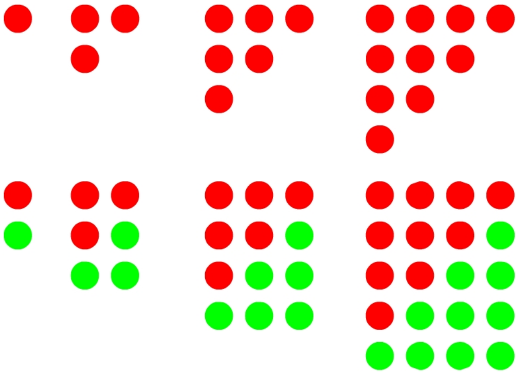
1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45,

1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221, 1113213211

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45,



$$1,\quad 3,\quad 6,\quad 10,\quad 15,\quad 21,\quad 28,\quad 36,\quad 45,\quad \tfrac{1}{2}\times n\times(n+1)$$



Voor sommige rijen kun je een **formule** geven.

$$2,\quad 4,\quad 6,\quad 8,\quad 10,\quad 12,\quad 14,\quad 16,\quad 18,\quad 2 \times n$$

$$1,\quad 5,\quad 9,\quad 13,\quad 17,\quad 21,\quad 25,\quad 29,\quad 33,\quad 1 + 4 \times n$$

$$1,\quad 3,\quad 6,\quad 10,\quad 15,\quad 21,\quad 28,\quad 36,\quad 45,\quad \tfrac{1}{2} \times n \times (n+1)$$

$$1,\quad 11,\quad 21,\quad 1211,\quad 111221,\quad 312211,\quad 13112221,\quad 1113213211$$

We noemen de getallen $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ de **natuurlijke getallen.**

We noemen de getallen $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ de **natuurlijke getallen.**

Een natuurlijk getal a is een **deler** van een natuurlijk getal b, als er een natuurlijk getal k bestaat waarvoor geldt dat $a \times k = b$.

Voorbeeld:

- 3 is een deler van 15, want $3 \times 5 = 15$.
- 2 is geen deler van 15, want er is geen k zodat $2 \times k = 15$.

Getal	Delers
2	$1, 2$
3	$1, 3$
4	$1, 2, 4$
5	$1, 5$
6	$1, 2, 3, 6$

Een natuurlijk getal groter dan 1 heet een **priemgetal** als het getal alléén deelbaar is door 1 en zichzelf.

Getal	Delers
2	$1, 2$
3	$1, 3$
4	$1, 2, 4$
5	$1, 5$
6	$1, 2, 3, 6$

Een natuurlijk getal groter dan 1 heet een **priemgetal** als het getal alléén deelbaar is door 1 en zichzelf.

Getal	Delers	Priemgetal
2	1, 2	Ja
3	1, 3	Ja
4	1, 2, 4	Nee
5	1, 5	Ja
6	1, 2, 3, 6	Nee

Een natuurlijk getal groter dan 1 heet een **priemgetal** als het getal alléén deelbaar is door 1 en zichzelf.

Getal	Delers	Priemgetal
2	$1, 2$	Ja
3	$1, 3$	Ja
4	$1, 2, 4$	Nee
5	$1, 5$	Ja
6	$1, 2, 3, 6$	Nee

Zo vinden we een rijtje:

$$2, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 11, \quad 13, \quad 17, \quad 19, \quad 23, \quad \ldots$$

- Is er een formule voor de rij van priemgetallen?
- Hoeveel priemgetallen zijn er?
- Kunnen we "makkelijk" grote priemgetallen vinden?

Eratosthenes

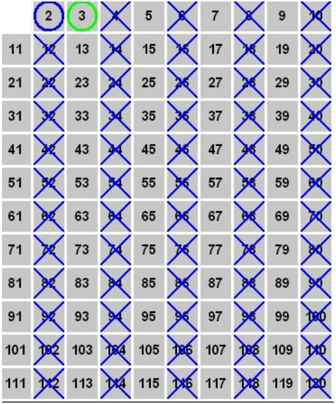
Euclides

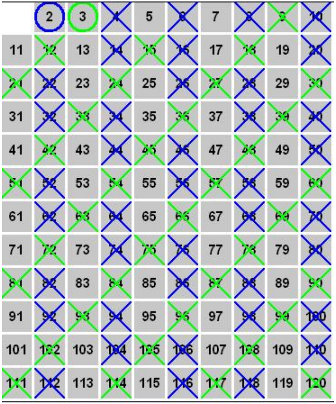
Zeef van Eratosthenes

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120

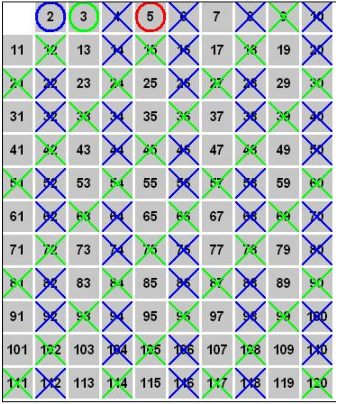
	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
81	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	99	~~100~~
101	~~102~~	103	~~104~~	105	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~
111	~~112~~	113	~~114~~	115	~~116~~	117	~~118~~	119	~~120~~

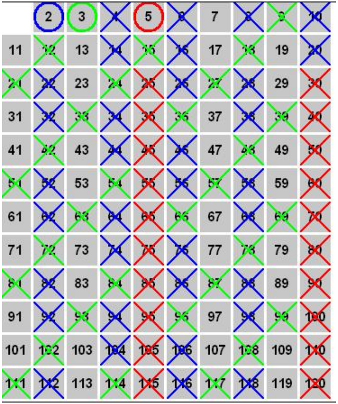
Zeef van Eratosthenes



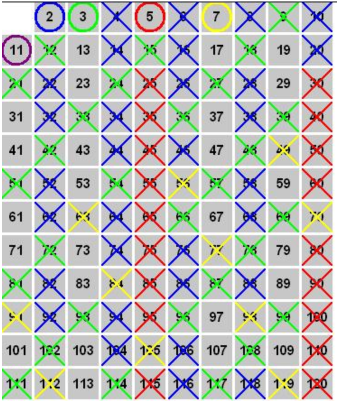


Zeef van Eratosthenes





Zeef van Eratosthenes



Stelling: Ieder getal is te schrijven als product van priemgetallen.

Voorbeeld: $204 = 2 \times 2 \times 3 \times 17$.

Voorbeeld: $11300413 =$.

Stelling: Ieder getal is te schrijven als product van priemgetallen.

Voorbeeld: $204 = 2 \times 2 \times 3 \times 17$.

Voorbeeld: $11300413 = 1427 \times 7919$.

Stelling: Er zijn oneindig veel priemgetallen.

Bewijs:

Stelling: Er zijn oneindig veel priemgetallen.

Bewijs: Stel dat de lijst van priemgetallen eindig is, zeg:

$$2, 3, 5, \ldots, p. \qquad\qquad (*)$$

Stelling: Er zijn oneindig veel priemgetallen.

Bewijs: Stel dat de lijst van priemgetallen eindig is, zeg:

$$2, 3, 5, \ldots, p. \qquad (*)$$

Bekijk het getal:

$$(2 \times 3 \times 5 \times \ldots \times p) + 1$$

Stelling: Er zijn oneindig veel priemgetallen.

Bewijs: Stel dat de lijst van priemgetallen eindig is, zeg:

$$2, 3, 5, \ldots, p. \qquad (*)$$

Bekijk het getal:

$$(2 \times 3 \times 5 \times \ldots \times p) + 1$$

- Het getal is te schrijven als product van priemgetallen.

Stelling: Er zijn oneindig veel priemgetallen.

Bewijs: Stel dat de lijst van priemgetallen eindig is, zeg:

$$2, 3, 5, \ldots, p. \qquad (*)$$

Bekijk het getal:

$$(2 \times 3 \times 5 \times \ldots \times p) + 1$$

- Het getal is te schrijven als product van priemgetallen.
- Maar het getal is niet deelbaar door een van de priemgetallen uit de lijst $(*)$.

Stelling: Er zijn oneindig veel priemgetallen.

Bewijs: Stel dat de lijst van priemgetallen eindig is, zeg:

$$2, 3, 5, \ldots, p. \qquad (*)$$

Bekijk het getal:

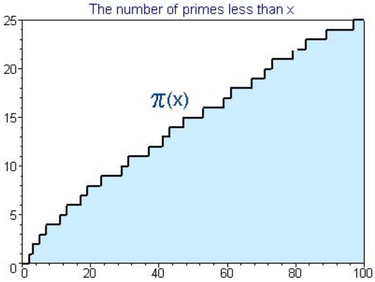
$$(2 \times 3 \times 5 \times \ldots \times p) + 1$$

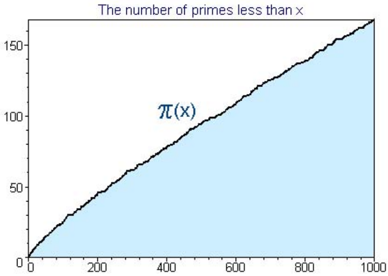
- Het getal is te schrijven als product van priemgetallen.
- Maar het getal is niet deelbaar door een van de priemgetallen uit de lijst $(*)$.

Conclusie: er moet nog zeker een priemgetal in de lijst $1, 2, 5, \ldots, p$ ontbreken.

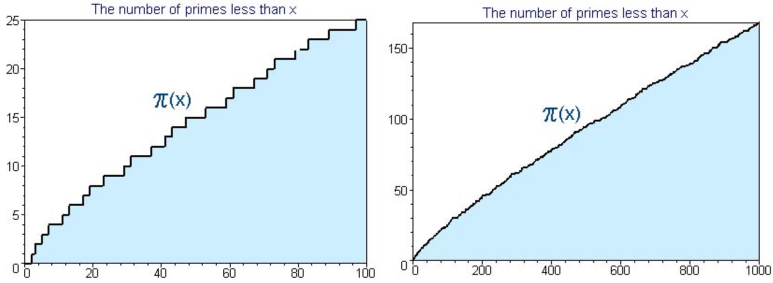
Vraag: Hoeveel priemgetallen zijn er kleiner dan 1.000.000?

Vraag: Hoeveel priemgetallen zijn er kleiner dan 1.000.000?





Vraag: Hoeveel priemgetallen zijn er kleiner dan 1.000.000? (78.498)



Gauss

Priemgetalstelling: Voor grote n is het aantal priemgetallen kleiner of gelijk aan n bij benadering gelijk aan:

$$\frac{n}{\log(n)}.$$

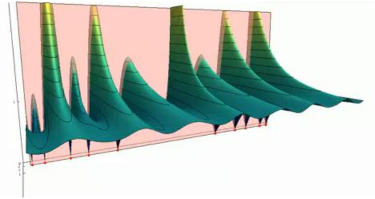
Wat betekent "bij benadering"?

n	$\pi(n)$	$\pi(n) - \frac{n}{\log(n)}$	Procentuele afwijking
10^3	168	23	16%
10^6	78.498	6.116	8.4%
10^9	50.847.534	2.592.592	5.4%
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
10^{23}	$\approx 1,925 \times 10^{21}$	$3,7083 \times 10^{19}$	$2,0\%$

Riemann

La Vallee Poussin

Hadamard



Wat betekent "bij benadering"?

n	$\pi(n)$	$\pi(n) - \frac{n}{\log(n)}$	Procentuele afwijking
10^3	168	23	16%
10^6	78.498	6.116	8.4%
10^9	50.847.534	2.592.592	5.4%
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
10^{23}	$\approx 1,925 \times 10^{21}$	$3,7083 \times 10^{19}$	$2,0\%$

Millenniumprobleem: er is een prijs van 1.000.000 dollar uitgeloofd voor het vinden van de ‘beste mogelijke’ foutschatting.