

Positiestelsels, rekenen en streepjescodes

Dion Coumans, Mai Gehrke, Lorijn van Rooijen

OMO-workshop 2009



Overzicht

Nijmeegse tweedaagse: leerlingen ervaren twee dagen hoe het is om wiskunde te studeren.

Opbouw minicursus:

1. Positiestelsels
2. Het binaire stelsel
3. Streepjescodes

Zie ook: www.math.ru.nl/~coumans



Positiestelsels

Romeinse getallen:

gebruik de symbolen I, V, X, L, C, D, M
additief stelsel

Positiestelsel:

waarde van een symbool hangt af van zijn plaats in het getal, bijvoorbeeld: 17 - 723



Positiestelsels

1. Kies een aantal symbolen: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
2. Geef één van de symbolen de betekenis 'niets'
3. Gebruik de overige symbolen om zo ver mogelijk te tellen: 1-2-3-4-5-6-7-8-9
4. Noteer het volgende getal met 10:

$0 + (\text{aantal symbolen dat we gebruiken}) \cdot 1$

$$1 + G \cdot 1$$

11

⋮

⋮

$$9 + G \cdot 1$$

19

$$0 + G \cdot 2$$

20

⋮

⋮

$$9 + G \cdot 9$$

99

$$0 + G \cdot (0 + G \cdot 1)$$

100



Positiestelsels

Hetzelfde principe werkt met een ander aantal symbolen,
bijvoorbeeld 0,1,2:

1-2-10-11-12-20-21-22-100-101-...

- Hoe werkt optellen en vermenigvuldigen?
- Binaire getallen



Streepjescodes

In gebruik sinds de jaren '70
Automatisch voorraad bijhouden



Foutherkende code: een geldige streepjescode voldoet aan de volgende regel:

$3 \cdot (\text{som even plaatsen}) + (\text{som oneven plaatsen})$
is deelbaar door 10



EAN

European Article Number (EAN)

Eerste 12 cijfers: informatie over het product

13^e cijfer: checkdigit

Vraag: Kun je elke 12 cijferige code aanvullen tot een geldige EAN-code?





EAN - foutherkenning

Welke fouten worden herkend?

1. Het verkeerd lezen van één van de cijfers
2. Het verwisselen van twee naburige cijfers

Ter herinnering, een geldige code voldoet aan:

$3 \cdot (\text{som even plaatsen}) + (\text{som oneven plaatsen})$
is deelbaar door 10



EAN - foutherkenning

1. Het verkeerd lezen van één van de cijfers

Geldige code: $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12}$

$$3 \cdot (a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12}) + (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11})$$

noemen we de **controlewaarde (cw)**

Wat gebeurt er als we één cijfer veranderen?

- nieuwe cw = oude cw \pm (cijfer tussen 1 en 9)
- nieuwe cw = oude cw $\pm 3 \cdot$ (cijfer tussen 1 en 9)



EAN - foutherkenning

2. Het verwisselen van twee naburige cijfers

Geldige code: $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12}$

Nieuwe code: $a_2 a_1 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12}$

Wat gebeurt er met de controlewaarde?

$$3 \cdot (a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12}) + (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11})$$

$$3 \cdot (a_1 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12}) + (a_2 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11}) \quad -$$

$$3 \cdot (a_2 - a_1) + (a_1 - a_2)$$

$$= 2 \cdot (a_2 - a_1)$$



EAN - foutherkenning

2. Het verwisselen van twee naburige cijfers

Geldige code: $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12}$

Nieuwe code: $a_2 a_1 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12}$

Verschil = $2 \cdot (a_2 - a_1)$

Fout wordt niet altijd herkend, bijv.

5050000000000 en 05500000000000

zijn allebei geldige EANs.



ISBN

International standard book number (ISBN)

Bestaat uit 10 cijfers

Eerste negen cijfers: informatie over het boek

10^e cijfer: checkdigit

Een geldig ISBN $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}$ voldoet aan:

$$10a_1 + 9a_2 + 8a_3 + 7a_4 + 6a_5 + 5a_6 + 4a_7 + 3a_8 + 2a_9 + 1a_{10}$$

is deelbaar door elf



ISBN

Vraag: is elk negencijferig rijtje aan te vullen tot een geldig ISBN?

Nee, bijv. 000000006_

$$\underbrace{10 \cdot 0 + 9 \cdot 0 + \dots + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot _}_{12} = \text{elfvoud}$$

Oplossing: laat op de laatste plaats ook het symbool X toe en lees X als 10.



ISBN - foutherkenning

Welke fouten worden herkend?

1. Het verkeerd lezen van één van de cijfers
2. Het verwisselen van twee naburige cijfers
3. Het verwisselen van twee willekeurige cijfers

Een geldig ISBN voldoet aan:

$$10a_1 + 9a_2 + 8a_3 + 7a_4 + 6a_5 + 5a_6 + 4a_7 + 3a_8 + 2a_9 + 1a_{10}$$

is deelbaar door elf



ISBN - foutherkenning

1. Het verkeerd lezen van één van de cijfers

Geldige code: $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12}$

$$10a_1 + 9a_2 + 8a_3 + 7a_4 + 6a_5 + 5a_6 + 4a_7 + 3a_8 + 2a_9 + 1a_{10}$$

noemen we de **controlewaarde (cw)**

Wat gebeurt er als we één cijfer veranderen?

$$\text{nieuwe cw} = \text{oude cw} \pm \text{plaats verand.} \cdot \text{verschil}$$



ISBN - foutherkenning

2. Het verwisselen van twee naburige cijfers

Geldige code: $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12}$

Nieuwe code: $a_1 a_2 a_3 a_5 a_4 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12}$

Wat gebeurt er met de controlewaarde?

$$\begin{aligned} &10a_1 + 9a_2 + 8a_3 + 7a_4 + 6a_5 + 5a_6 + 4a_7 + 3a_8 + 2a_9 + 1a_{10} \\ &10a_1 + 9a_2 + 8a_3 + 7a_5 + 6a_4 + 5a_6 + 4a_7 + 3a_8 + 2a_9 + 1a_{10} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &7 \cdot (a_4 - a_5) + 6 \cdot (a_5 - a_4) \\ &= a_4 - a_5 \end{aligned}$$



ISBN - foutherkenning

3. Het verwisselen van twee willekeurige cijfers

Geldige code: $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12}$

Nieuwe code: $a_1 a_7 a_3 a_4 a_5 a_6 a_2 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12}$

Wat gebeurt er met de controlewaarde?

$$\begin{aligned} &10a_1 + 9a_2 + 8a_3 + 7a_4 + 6a_5 + 5a_6 + 4a_7 + 3a_8 + 2a_9 + 1a_{10} \\ &10a_1 + 9a_7 + 8a_3 + 7a_4 + 6a_5 + 5a_6 + 4a_2 + 3a_8 + 2a_9 + 1a_{10} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &9 \cdot (a_2 - a_7) + 4 \cdot (a_7 - a_2) \\ &= 5 \cdot (a_2 - a_7) \end{aligned}$$



Bewijs van de rekentruc

Wat gebeurt er bij de rekentruc?

x , y twee getallen tussen 5 en 10.

Opgestoken vingers: $x - 5$ $y - 5$

Gebogen vingers: $10 - x$ $10 - y$

Je berekent:

$$\begin{aligned} ((x - 5) + (y - 5)) \cdot 10 &+ (10 - x) \cdot (10 - y) = \\ 10x + 10y - 100 &+ 100 - 10x - 10y + xy = xy \end{aligned}$$



Nog een rekentruc

Hoe weet je of een getal deelbaar is door 9?

Tel de cijfers bij elkaar op.

Is de uitkomst deelbaar door 9? Dan is je oorspronkelijk getal ook deelbaar door 9.

Voorbeeld: 75627 is deelbaar door 9, want

$$7 + 5 + 6 + 2 + 7 = 27 \text{ is deelbaar door } 9.$$

Waarom werkt dit?