

# **Positiestelsels, rekenen en streepjescodes**

**Dion Coumans**

**Mai Gehrke**

**Lorijn van Rooijen**

Radboud Universiteit Nijmegen



# 1 Introductie

In dit dictaat ‘Positiestelsels, rekenen en streepjescodes’ verdiepen we ons in de wereld van de getallen. In het eerste hoofdstuk nemen we onze manier om getallen te noteren onder de loep en analyseren de ‘simpele bewerkingen’ optellen en vermenigvuldigen. In de twee hoofdstukken daarna zie je dat deze abstracte theorie aan de basis staat van een aantal alledaagse toepassingen.

Een opmerking vooraf: We werken in deze cursus alleen met natuurlijke getallen. Dat zijn de getallen die je gebruikt om te tellen:  $0, 1, 2, 3, \dots$ . Spreken we van ‘een getal’, dan bedoelen we een natuurlijk getal.

Mocht je na deze cursus nog vragen hebben, bel of mail ons dan gerust. Vind je de telefoonnummers er vreemd uit zien? Ze zijn hexadecimaal geschreven! Na hoofdstuk 3 weet je wat dat betekent en kun je ze ontcijferen (zet er na het ontcijferen nog een nul voor om ons te bellen).

Veel plezier!

Dion Coumans	coumans@math.ru.nl	E85D908
Mai Gehrke	m.gehrke@math.ru.nl	E85DA64
Lorijn van Rooijen	lorijn.vanrooijen@student.ru.nl	

## 2 Positiestelsels

In tegenstelling tot het oude Rome, waar verschillende tekens bestonden voor 1, 5, 10, 50, 100, 500 en 1000, combineren wij tegenwoordig de tien symbolen  $0, \dots, 9$  om getallen te noteren. Hierbij gebruiken we het zogenaamde *positiestelsel*. In een positiestelsel hangt de betekenis van een symbool af van zijn plaats in het getal.

**Opgave 1.** Hoeveel verschillende Romeinse getallen kun je noteren met  $I$  (1),  $V$  (5),  $X$  (10),  $L$  (50),  $C$  (100),  $D$  (500) en  $M$  (1000)? Hoeveel verschillende getallen kun je opschrijven met  $0, \dots, 9$ ?

De symbolen  $0, \dots, 9$  die wij gebruiken zijn eigenlijk nogal willekeurig. In dit hoofdstuk zullen we zien wat een algemeen positiestelsel is en ontdekken we dat je in zo'n stelsel makkelijk kunt rekenen.

Wat is een positiestelsel nu precies? Het maken van een positiestelsel gaat in vier stappen:

- i) Eerst kiezen we een aantal symbolen. We kunnen bijvoorbeeld de bekende tien symbolen nemen:  $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ .
- ii) We geven één van de symbolen de betekenis 'niets'. Dit lijkt misschien zonde: als een symbool voor 'niets' staat, waarom gebruiken we het dan? Later zullen we zien dat het positiestelsel juist zo krachtig is doordat we 'niets' aan kunnen geven. Wij gebruiken hiervoor het symbool 0.
- iii) De overige symbolen worden gebruikt om zo ver mogelijk te tellen:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9$$

- iv) Het volgende getal in de keten noteren we met 10. Het symbool 1 in stap (iii) betekende één. Nu er een 0 achter de 1 staat, krijgt het symbool een andere betekenis: het betekent één keer 'het aantal symbolen dat we gebruiken'. Laten we dit aantal noteren met  $G$ . In ons voorbeeld is  $G$  gelijk aan tien. De betekenis van 10 is dus  $0 + G \cdot 1$ .

Nu kunnen we zo doorgaan: als we bij 10 één eenheid optellen krijgen we  $11 = 1 + G \cdot 1$ , als we bij 11 één eenheid optellen krijgen we  $12 = 2 + G \cdot 1$ , en door zo verder te gaan krijgen we ook  $13, 14, \dots, 19$ .

Als we nu bij 19 nog 1 optellen, hogen we de 9 dus met 1 op, en krijgen we weer een keer 'het aantal symbolen dat we gebruiken'. Dus krijgen we  $0 + G \cdot 2 = 20$ . Zo verder krijgen we ook  $21, 22, \dots, 99$ . Bij 99 aangekomen, tellen we 1 bij 9 op, zodat we 0 eenheden en nog een keer 'het aantal symbolen dat we gebruiken' krijgen. Het meest rechtse symbool moet dus een 0 worden. Maar nu hebben we in totaal  $G$  keren  $G$  en dit kunnen we niet met alleen de tweede plek aangeven. We krijgen nu  $100 = 0 + G \cdot (0 + G \cdot 1)$ , etc. Bijvoorbeeld:

$$347 = 7 + G \cdot (4 + G \cdot 3)$$

$$10499 = 9 + G \cdot (9 + G \cdot (4 + G \cdot (0 + G \cdot 1)))$$

Door met de symbolen  $0, 1, \dots, 9$  te beginnen, krijgen we de (gebruikelijke) decimale notatie voor getallen. Wat gebeurt er als we een andere verzameling symbolen nemen?

**Opgave 2.** Laten we de symbolen  $0, 1, 2$  nemen. Wat zijn de eerste dertig getallen in dit positiestelsel? Hoe wordt het getal dat we in dit systeem als 122 schrijven, in ons positiestelsel met tien symbolen geschreven?

We kunnen natuurlijk ook met meer dan tien symbolen beginnen.

**Opgave 3.** Laten we de symbolen  $0, 1, 2, \dots, 9, X$  nemen. Hoe worden de eerste twintig getallen in dit positiestelsel geschreven?

Het aantal symbolen dat je gebruikt in een positiestelsel noemen we het *grondtal* of de *basis* van het positiestelsel. Bovenstaande opgave ging dus over het positiestelsel met grondtal elf, oftewel over een elftallig stelsel. In het vervolg geven we met een subscript aan in welke basis een getal is geschreven,  $200_3$  is bijvoorbeeld een drietallig genoteerd getal.

Ons talstelsel met grondtal 10 is geen West-Europese vinding. Het is in de middeleeuwen in Arabië ontwikkeld. Vermoedelijk hebben de Arabieren het weer van de Indiërs geleerd. Met de opbloeiende handel in de twaalfde eeuw is het nieuwe talstelsel ook in Europa bekend geworden, waar het langzaam het oude Romeinse talstelsel heeft verdrongen.

## 2.1 Van $G$ -tallige naar tientallige notatie

We hebben nu gezien dat je voor een willekeurig grondtal  $G$ ,  $G$ -tallig getallen kunt schrijven. In de volgende opgaven ontdek je hoe je van een  $G$ -tallig geschreven getal, zijn tientallige notatie kunt bepalen.

**Opgave 4.** Hoe schrijf je het getal  $210_3$  tientallig? En  $X3X_{11}$ ?

**Opgave 5.** Hoe bepaal je, voor een willekeurig natuurlijk getal  $G$  en een getal  $a_2a_1a_0$  in het  $G$ -tallig stelsel, de tientallige notatie van  $a_2a_1a_0$ ?

$$a_2a_1a_0(G\text{-tallig}) = \dots\dots\dots (tientallig)$$

**Opgave 6.** Met de hierboven gevonden formule kun je driecijferige getallen in een  $G$ -tallig stelsel omzetten naar het tientallig stelsel, maar we willen natuurlijk graag een nog algemenere formule hebben. Hoe bepaal je, voor een getal  $G$  en een getal  $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$  in het  $G$ -tallig stelsel, de notatie voor  $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$  in het tientallig stelsel?

$$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0(G\text{-tallig}) = \dots\dots\dots (tientallig)$$

## 2.2 Optellen en vermenigvuldigen

Op de basisschool leer je hoe je getallen kunt optellen en vermenigvuldigen. Door het positiestelsel hebben we een handige methode om deze operaties uit te voeren. In het Romeinse talstelsel is optellen (laat staan vermenigvuldigen) veel lastiger. Probeer de volgende opgave maar eens te maken zonder de getallen eerst om te rekenen naar ons hedendaagse tientallig stelsel.

**Opgave 7.** Bereken de som van de twee Romeinse getallen MCMXCIX en MCCXXIV.  
 ( $I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000$ )

In het positiestelsel kun je getallen optellen door ze onder elkaar te zetten:

$$\begin{array}{r} 231 \\ + 84 \\ \hline 315 \end{array}^{10}$$

Deze methode werkt doordat de optelling en vermenigvuldiging de volgende eigenschappen hebben:

i) De optelling is *associatief*: voor alle getallen  $n, m, k$ ,

$$(n + m) + k = n + (m + k)$$

ii) De optelling is *commutatief*: voor alle getallen  $n, m$ ,

$$n + m = m + n$$

iii) De vermenigvuldiging is *commutatief*: voor alle getallen  $n, m$ ,

$$n \cdot m = m \cdot n$$

iv) De vermenigvuldiging *distribueert* over de optelling: voor alle getallen  $n, m, k$ ,

$$m \cdot (n + k) = m \cdot n + m \cdot k \quad \text{en} \quad (n + k) \cdot m = n \cdot m + k \cdot m$$

v) Er is een *delingsalgoritme*, voor alle getallen  $n, m$  met  $m \neq 0$ , zijn er unieke getallen  $q, r$  zodat

$$n = q \cdot m + r \quad \text{en} \quad 0 \leq r < m$$

We illustreren de rol van deze regels aan de hand van bovenstaand voorbeeld. Als je 231 en 84 wilt optellen, bereken je  $1 + 10 \cdot (3 + 10 \cdot 2) + 4 + 10 \cdot 8$  (vanwege de betekenis van de notatie in een positiestelsel). Waarom is dat gelijk aan  $5 + 10 \cdot (1 + 10 \cdot 3) (= 315)$ ? Vanwege bovenstaande vijf regels! Kijk maar hieronder. Omdat de optelling associatief is, hoeven we ons als we optellen niet druk te maken over de haakjes.

$$\begin{aligned} 231 + 84 &= 1 + 10 \cdot (3 + 10 \cdot 2) + 4 + 10 \cdot 8 \\ &= 1 + 4 + 10 \cdot (3 + 10 \cdot 2) + 10 \cdot 8 && (+ \text{ commutatief}) \\ &= 1 + 4 + 10 \cdot (3 + 10 \cdot 2 + 8) && (\cdot \text{ distribueert over } +) \\ &= 1 + 4 + 10 \cdot (3 + 8 + 10 \cdot 2) && (+ \text{ commutatief}) \\ &= 5 + 10 \cdot (11 + 10 \cdot 2) && (\text{optellen van getallen kleiner dan } 10) \\ &= 5 + 10 \cdot (1 \cdot 10 + 1 + 10 \cdot 2) && (\text{delingsalgoritme}) \\ &= 5 + 10 \cdot (1 + 1 \cdot 10 + 10 \cdot 2) && (+ \text{ commutatief}) \\ &= 5 + 10 \cdot (1 + 10 \cdot 1 + 10 \cdot 2) && (\cdot \text{ commutatief}) \\ &= 5 + 10 \cdot (1 + 10 \cdot (1 + 2)) && (\cdot \text{ distribueert over } +) \\ &= 5 + 10 \cdot (1 + 10 \cdot 3) && (\text{optellen van getallen kleiner dan } 10) \\ &= 315 \end{aligned}$$

**Opgave 8.** Bereken  $77 + 588$  op bovenstaande wijze. Schrijf bij elke stap op welke regel je toepast. Geeft dit dezelfde uitkomst als de ‘onder-elkaar-zet-methode’?

De vijf regels voor de optelling hangen niet af van het grondtal 10 en gelden in elk positiestelsel. De ‘onder-elkaar-zet-methode’ om getallen op te tellen kun je dus ook in elk positiestelsel gebruiken.

**Opgave 9.** Bereken:

$$\begin{array}{r} 222 \\ + 111 \\ \hline \end{array}_3$$

$$\begin{array}{r} 5X7 \\ + 36 \\ \hline \end{array}_{11}$$

**Opgave 10.** Schrijf de getallen uit de vorige opgave tientallig om je antwoorden te controleren.

Met wat meer werk kun je laten zien dat ook de onder-elkaar-zet-methode om twee getallen te vermenigvuldigen correct is (in elk  $G$ -tallig stelsel). Pas deze methode toe in de volgende opgave en vertaal de getallen weer naar het tientallig stelsel om je antwoorden te controleren.

**Opgave 11.** Bereken:

$$\begin{array}{r} 201 \\ \times 21 \\ \hline \end{array}_3$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 22 \\ \hline \end{array}_3$$

$$\begin{array}{r} 72 \\ \times 65 \\ \hline \end{array}_{11}$$

## 2.3 Van tientallige naar $G$ -tallige notatie

In paragraaf 2.1 heb je ontdekt hoe je de tientallige notatie van een  $G$ -tallig geschreven getal kunt bepalen. In deze paragraaf leggen we uit hoe je het omgekeerde kunt doen: Hoe bepaal je de  $G$ -tallige notatie van een tientallig geschreven getal?

**Opgave 12.** Hoe schrijf je het getal  $18_{10}$  drietallig? En  $200_{10}$  elftallig? En  $121_{10}$  drietallig?

Zoals we hebben gezien zijn er, voor alle getallen  $n, m$  met  $m \neq 0$ , unieke getallen  $q, r$  zodat

$$n = q \cdot m + r \quad \text{en} \quad 0 \leq r < m.$$

Dit delingsalgoritme speelt een belangrijke rol bij het bepalen van de  $G$ -tallige notatie van een (tientallig geschreven) getal. Voor een gegeven grondtal  $G$  en een getal  $n$  dat tientallig is geschreven, is de  $G$ -tallige notatie voor  $n$  een rijtje cijfers  $a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$ , waarbij alle getallen  $a_0, a_1, \dots, a_k$  strikt kleiner zijn dan  $G$  en

$$n = a_0 + G \cdot (a_1 + G \cdot (a_2 + \dots + G \cdot (a_{k-1} + G \cdot a_k) \dots))$$

Dit betekent dat we  $a_0$  kunnen vinden door het delingsalgoritme toe te passen op  $n$  en  $G$ , m.a.w. we schrijven

$$n = q \cdot G + r.$$

Het getal  $a_0$  is dan de rest  $r$  van deze deling en  $a_1 + G \cdot (a_2 + \dots + G \cdot (a_{k-1} + G \cdot a_k) \dots)$  is het getal  $q$ .

Zodra we  $q$  gevonden hebben, kunnen we  $a_1$  vinden door het delingsalgoritme toe te passen op  $q$  en  $G$ , enz.

Deze procedure geeft een methode om de  $G$ -tallige notatie te vinden van een tientallig geschreven getal  $n$ :

$$\begin{aligned} n &= q_0 \cdot G + r_0 && \text{het symbool } a_0 \text{ voor } r_0 \text{ in het } G\text{-tallig stelsel is het meest rechtse cijfer} \\ q_0 &= q_1 \cdot G + r_1 && \text{het symbool } a_1 \text{ voor } r_1 \text{ in het } G\text{-tallige stelsel is het tweede cijfer} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ q_{k-1} &= 0 \cdot G + r_k && \text{het symbool } a_k \text{ voor } r_k \text{ in het } G\text{-tallige stelsel is het meeste linkse cijfer.} \end{aligned}$$

**Opgave 13.** Geef de vijftallige notatie van  $1215_{10}$ .

**Opgave 14.** Geef de elftallige notatie van  $1215_{10}$ .

**Opgave 15.** Geef de negentallige notatie van  $547_{10}$ .

**Opgave 16.** Geef de drietallige notatie van  $547_{10}$ .

### 3 Het binaire stelsel

In een computer is veel informatie opgeslagen, denk bijvoorbeeld aan teksten, plaatjes, kleuren en programma's. Om dit soort informatie te kunnen opslaan, moeten de gegevens op een zodanige manier worden gecodeerd dat de computer er mee kan werken. Computers werken op elektriciteit en de enige mogelijkheid om iets te coderen is door verschillende hoeveelheden stroom door delen van de computer te laten gaan. Om een duidelijk onderscheid te hebben tussen de verschillende mogelijkheden wordt er met slechts twee hoeveelheden gewerkt: geen capaciteit (0) en volle capaciteit (1). Zodoende wordt alles in een computer met twee symbolen gecodeerd.

Gelukkig hebben wij een goed systeem om getallen met twee symbolen te noteren: het positiestelsel op twee symbolen. We noemen dit de binaire notatie.

**Opgave 17.** Schrijf de eerste twintig getallen in de binaire notatie.

Als een computer voor ons gaat rekenen moet hij dus de decimale notatie naar de binaire notatie vertalen en andersom.

**Opgave 18.** Geef de formule voor het vertalen van de binaire naar de decimale notatie.

**Opgave 19.** Schrijf de volgende binaire getallen in decimale notatie:  $101_2$ ,  $110101_2$ ,  $1100_2$ .

**Opgave 20.** Beschrijf het algoritme om getallen in de decimale notatie naar hun binaire notatie te vertalen.

**Opgave 21.** Schrijf de volgende decimale getallen binair:  $7_{10}$ ,  $25_{10}$ ,  $128_{10}$ ,  $200_{10}$ .

Zoals we hebben gezien, kun je in een positiestelsel eenvoudig optellen en vermenigvuldigen.

**Opgave 22.** Bereken in het binaire positiestelsel:

$$\begin{array}{r} 110101 \\ + \quad 1100 \\ \hline \end{array}_2$$

$$\begin{array}{r} 1100 \\ \times \quad 101 \\ \hline \end{array}_2$$

**Opgave 23.** Vertaal de getallen van de vorige opgave naar hun decimale schrijfwijze om je antwoorden te controleren.

In opgave 21 heb je  $(200)_{10}$  binair geschreven. Dit geeft een getal met acht cijfers in plaats van de drie cijfers in 200. Als je het decimale getal tien triljoen ( $10^{10}$ ) binair wilt schrijven, krijg je een behoorlijk lang getal:

$$2^{30} = (2^3)^{10} = 8^{10} \leq 10^{10} \leq 16^{10} = 2^{40}$$

dus de binaire notatie van  $10^{10}$  heeft tussen de 30 en 40 cijfers.

In zulke lange getallen treedt sneller een leesfout op en ook zijn ze erg onhandig als programmeurs ze moeten invoeren. Om de getallen korter te kunnen noteren, wordt er gewerkt met het hexadecimale stelsel. Dit is het positiestelsel met basis 16. We gebruiken hiervoor de volgende symbolen:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.$$

**Opgave 24.** Schrijf de eerste twintig getallen in hexadecimale notatie.

**Opgave 25.** Schrijf  $94D3_{16}$  in decimale en  $100_{10}$  in hexadecimale notatie.

**Opgave 26.** Schrijf  $9A3B_{16}$  binair en  $1011001_2$  hexadecimaal.

Hoe heb je de vorige opgave aangepakt? Om om te rekenen van de binaire naar de hexadecimale notatie kun je natuurlijk het binaire getal eerst tientallig schrijven en vervolgens deze tientallige notatie vertalen naar een hexadecimale notatie. Doordat  $16 = 2^4$  is er echter een directe methode: elk hexadecimaal cijfer correspondeert met een blok van vier binaire cijfers. Zo schrijf je  $7C4F_{16}$  als volgt in binaire notatie:

$$\begin{array}{cccc} 7 & C & 4 & F \\ 0111 & 1100 & 0100 & 1111 \end{array}$$

**Opgave 27.** Leg uit waarom bovenstaande vertaalmethode van de hexadecimale naar de binaire notatie werkt. Zie je nu ook hoe je een binair getal rechtstreeks hexadecimaal kunt schrijven?

**Opgave 28.** Schrijf je telefoonnummer in binaire en hexadecimale notatie! Kun je nu ook onze telefoonnummers ontcijferen?

**Opgave 29.** Bij *true color* worden kleuren op het beeldscherm van de computer weergegeven door een RGB-code. Een RGB-code bestaat uit drie bytes (een byte is een rijtje van 8 nullen en enen), één voor **R**ood, één voor **G**roen en één voor **B**lauw (eigenlijk Red, Green en Blue). Voor RGB-codes gebruikt men soms de decimale notatie en soms de hexadecimale. In de decimale notatie is een RGB-code een rijtje van drie getallen tussen 0 en 255, bijvoorbeeld 210.35.106. Hexidecimaal noteert men dat als D2.23.6A. De grootte van elk van de drie getallen geeft de intensiteit van de kleur weer.

- i) Hoeveel kleuren zijn er in het true color schema?
- ii) De RGB-code voor wit is FF.FF.FF. Wat zijn de RGB-codes voor rood, paars, zwart en grijs?
- iii) Als de som van twee codes gelijk is aan FF.FF.FF, dan heten deze kleuren *complementair* aan elkaar. Wat zijn de complementaire kleuren van rood, groen en blauw?

Je kunt een binair-decimaal-hexadecimaal omzetter op internet vinden op:  
<http://www.mathsisfun.com/binary-decimal-hexadecimal-converter.html>

## 4 Streepjescodes

Sinds de jaren 70 worden streepjescodes gebruikt op producten in supermarkten en tegenwoordig zijn vrijwel alle producten voorzien van een streepjescode. Met dit systeem wordt automatisch bijgehouden hoe het staat met de voorraad van de winkel. Bij de kassa wordt je aankoop gescand en de scanner vertaalt de streepjescode in een rijtje cijfers. In dit rijtje cijfers zit informatie over het product ‘verborgen’ waardoor de computer weet welk product er verkocht is. Als we het in het vervolg over een streepjescode hebben, dan bedoelen we het bijbehorende rijtje cijfers.

Bij het inscannen van de code zouden er fouten kunnen optreden: de scanner kan één van de getallen verkeerd inlezen. Toch gebeurt het niet vaak dat er opeens vreemde producten op je kassabon verschijnen. Dit komt doordat er een controlesysteem is ingebouwd in streepjescodes. Dit systeem berust op het feit dat niet elk rijtje cijfers voorkomt als streepjescode. Een geldige streepjescode voldoet aan de volgende regel: Neem driemaal de som van de cijfers op de even posities (van linksaf geteld!). Tel hierbij op de som van de cijfers op de oneven posities. Dit getal moet deelbaar zijn door tien.



Kijken we naar bovenstaand voorbeeld, dan moet het getal

$$3 \cdot (2 + 4 + 6 + 8 + 0 + 2) + (1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 1 + 8)$$

deelbaar zijn door 10. Inderdaad, de som geeft 100 en  $100 = 10 \cdot 10$ .

Leest de scanner een ‘ongeldige code’, dan is er blijkbaar iets misgegaan. De cassière ziet dat het scannen niet is gelukt en kan het opnieuw proberen, of de code met de hand intypen.

**Opgave 30.** Zoek een aantal producten met een streepjescode en controleer of de streepjescodes allemaal geldig zijn.

**Opgave 31.** Probeer in te zien dat het vervangen van één cijfer door een ander cijfer in een geldige streepjescode altijd een ongeldige code oplevert.

Bovenstaande streepjescode is een voorbeeld van een *European Article Number* (EAN). Vrijwel alle producten in de Nederlandse winkels hebben zo’n nummer. Deze codering is een uitbreiding van de Universal Product Code (UPC), die sinds 1973 wordt gebruikt om artikelen te coderen. Een EAN bestaat uit dertien cijfers. De eerste twaalf cijfers geven aan wie de fabrikant is en welk product het is. Het laatste cijfer zorgt dat de streepjescode een geldige streepjescode wordt.

**Opgave 32.** Laat zien dat elk twaalfcijferige code met één cijfer aan te vullen is tot een geldige (dertiencijferige) streepjescode.

Meestal worden streepjescodes met een scanner gelezen, maar het kan gebeuren dat een etiket beschadigd is en de code met de hand moet worden ingevoerd. Bij het overtypen van een rijtje cijfers kan het gebeuren dat twee opeenvolgende cijfers worden verwisseld. Helaas zorgt zo'n verwisseling er niet altijd voor dat een geldige code verandert in een ongeldige code.

**Opgave 33.** Laat aan de hand van een voorbeeld zien dat het verwisselen van twee naast elkaar gelegen cijfers in een geldige streepjescode soms weer tot een geldige streepjescode kan leiden.

Het EAN is een voorbeeld van een foutherkende codering. Dit is een methode om aan een rijtje (cijfers) extra informatie toe te voegen zodat ingeslopen fouten kunnen worden ontdekt. Bij het EAN is die 'extra informatie' het cijfer waarmee de twaalfcijferige code wordt aangevuld tot een geldige streepjescode. Door het toevoegen van dat extra cijfer, de zogenaamde 'check digit', kunnen bepaalde fouten (zoals het verkeerd lezen van één van de cijfers) worden herkend.

Een ander voorbeeld van een foutherkende codering die gebruik maakt van een check digit is de international standard book number (ISBN). Een ISBN bestaat uit tien cijfers. De eerste negen cijfers geven informatie over het boek (zoals de uitgever en de taal), het laatste cijfer zorgt voor de foutherkenning. Je kunt als volgt controleren of een gegeven rijtje van tien cijfers een geldig ISBN is: Neem 10 maal het eerste cijfer, 9 maal het tweede cijfer, 8 maal het derde cijfer, . . . , 1 maal het laatste cijfer. Tel dit alles bij elkaar op. Het rijtje is een geldig ISBN als het resultaat deelbaar is door elf. Zo is bijvoorbeeld 0-306-40615-2 een geldige ISBN code, want  $10 \cdot 0 + 9 \cdot 3 + 8 \cdot 0 + 7 \cdot 6 + 6 \cdot 4 + 5 \cdot 0 + 4 \cdot 6 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 2 = 132 = 12 \cdot 11$ .

**Opgave 34.** Is elk negencijferig rijtje met één cijfer aan te vullen tot een geldige ISBN code?

Je hebt zojuist als het goed is ontdekt dat niet elk negencijferig rijtje aan te vullen is tot een geldige ISBN code. Het gaat bijvoorbeeld mis bij het rijtje 000000006. Om op een elfvoud uit te komen, zou je op de laatste plaats 10 neer willen zetten, maar we hebben alleen de cijfers 0 t/m 9. Dit probleem wordt opgelost door op de laatste plaats in de ISBN code ook het symbool  $X$  toe te laten. Deze  $X$  lezen we als 10. Het rijtje 000000006 levert dan de geldige ISBN-code 000000006 $X$ . Door als check digit de cijfers 0 t/m 9 én het symbool  $X$  te gebruiken, kun je van elk negencijferig rijtje een geldige ISBN-code maken.

**Opgave 35.** Probeer in te zien dat het vervangen van één cijfer door een ander cijfer in een geldige ISBN-code altijd een ongeldige code oplevert.

Net als EAN, herkent ISBN dus het verkeerd invoeren van één van de cijfers. ISBN is echter nog sterker; het herkent ook het verwisselen van twee naast elkaar gelegen cijfers.

**Opgave 36.** Probeer in te zien dat het verwisselen van twee naast elkaar gelegen cijfers in een geldige ISBN code altijd een ongeldige code oplevert.

Bovenstaande ISBN codering wordt ook wel ISBN-10 genoemd. Deze codering werd gebruikt tot 31 december 2006. Sindsdien werkt men met ISBN-13, een codering die hetzelfde werkt als EAN. Nadeel van deze codering is dat hij minder fouten herkent dan de ISBN-10. Je hebt hierbij echter genoeg aan de cijfers 0 t/m 9 als check digit en tegenwoordig worden de meeste codes met een scanner gelezen, waardoor het verwisselen van twee naast elkaar gelegen cijfers niet vaak zal voorkomen.

## Bronnen

- Keune, F., *Getallen - van natuurlijk naar imaginair*, Den Haag 2009
- Ratio, <http://www.ratio.ru.nl>

## 5 Antwoorden

- In beide gevallen kun je oneindig veel verschillende getallen opschrijven. Bij de Romeinse notatie worden de getallen echter al snel heel lang.
- 0, 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, 101, 102, 110, 111, 112, 120, 121, 122, 200, 201, 202, 210, 211, 212, 220, 221, 222, 1000, 1001, 1002  
122<sub>3</sub> wordt tientallig geschreven als 17
- 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, X, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18
- 210<sub>3</sub> tientallig geschreven is:  $0 + 3 \cdot (1 + 3 \cdot 2) = 21$   
X3X<sub>11</sub> tientallig geschreven is:  $10 + 11 \cdot (3 + 11 \cdot 10) = 1253$
- $(a_2 a_1 a_0)_G = (a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot G + a_2 \cdot G^2)_{10}$
- $(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_G = (a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot G + \dots + a_{n-1} \cdot G^{n-1} + a_n \cdot G^n)_{10}$
- MMMCCXXIII
- Je kunt de regels in verschillende volgorden toepassen, een voorbeelduitwerking is:

$$\begin{aligned}
 77 + 588 &= 7 + 10 \cdot 7 + 8 + 10 \cdot (8 + 10 \cdot 5) \\
 &= 7 + 8 + 10 \cdot 7 + 10 \cdot (8 + 10 \cdot 5) && (+ \text{ commutatief}) \\
 &= 7 + 8 + 10 \cdot (7 + 8 + 10 \cdot 5) && (\cdot \text{ distribueert over } +) \\
 &= 15 + 10 \cdot (15 + 10 \cdot 5) && (\text{optellen van getallen kleiner dan } 10) \\
 &= 1 \cdot 10 + 5 + 10 \cdot (1 \cdot 10 + 5 + 10 \cdot 5) && (\text{delingsalgoritme}) \\
 &= 5 + 1 \cdot 10 + 10 \cdot (5 + 1 \cdot 10 + 10 \cdot 5) && (+ \text{ commutatief}) \\
 &= 5 + 10 \cdot 1 + 10 \cdot (5 + 10 \cdot 1 + 10 \cdot 5) && (\cdot \text{ commutatief}) \\
 &= 5 + 10 \cdot (1 + 5 + 10 \cdot (1 + 5)) && (\cdot \text{ distribueert over } +) \\
 &= 5 + 10 \cdot (6 + 10 \cdot 6) && (\text{optellen van getallen kleiner dan } 10) \\
 &= 665
 \end{aligned}$$

- 1110<sub>3</sub> en 632<sub>11</sub>
- 222<sub>3</sub> = 26<sub>10</sub>, 111<sub>3</sub> = 13<sub>10</sub>, 1110<sub>3</sub> = 39<sub>10</sub>  
5X7<sub>11</sub> = 722<sub>10</sub>, 36<sub>11</sub> = 39<sub>10</sub>, 632<sub>11</sub> = 761<sub>10</sub>
- 11221<sub>3</sub>, 2101<sub>3</sub> en 423X<sub>11</sub>
- 200<sub>3</sub>, 172<sub>11</sub> en 11111<sub>3</sub>
- 14330<sub>5</sub>
- X05<sub>11</sub>
- 667<sub>9</sub>
- 202021<sub>3</sub>

17. 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111, 10000, 10001, 10010, 10011

18.  $(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_2 = (a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 2 + \dots a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_n \cdot 2^n)_{10}$

19.  $5_{10}$ ,  $53_{10}$  en  $12_{10}$

20.

$$\begin{aligned} n &= q_0 \cdot 2 + r_0 & r_0 \text{ is het meest rechtse cijfer} \\ q_0 &= q_1 \cdot 2 + r_1 & r_1 \text{ is het tweede cijfer} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ q_{k-1} &= 0 \cdot 2 + r_k & r_k \text{ is het meeste linkse cijfer.} \end{aligned}$$

21.  $111_2$ ,  $11001_2$ ,  $10000000_2$  en  $11001000_2$

22.  $1000001_2$  en  $10001_2$

23.  $110101_2 = 53_{10}$ ,  $1100_2 = 12_{10}$ ,  $1000001_2 = 65_{10}$   
 $1100_2 = 12_{10}$ ,  $101_2 = 5_{10}$ ,  $10001_2 = 17_{10}$

24. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, 10, 11, 12, 13

25.  $38099_{10}$  en  $64_{16}$

26.  $1001101000111011_2$  en  $59_{16}$

27. Bekijk bijvoorbeeld het hexadecimale getal  $94D_{16}$ , dan geldt:

$$\begin{aligned} 94D_{16} &= 9 \cdot 16^2 + 4 \cdot 16 + 14 \\ &= (1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1) \cdot (2^4)^2 + (0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0) \cdot 2^4 + \\ &\quad (1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0) \\ &= 1 \cdot 2^{11} + 0 \cdot 2^{10} + 0 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + \\ &\quad 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \end{aligned}$$

waarbij we aan de rechterkant van het =-teken in het decimale stelsel rekenen. Dit voorbeeld illustreert hoe je in het algemeen van hexadecimaal naar binair kunt omrekenen door elk cijfer in de hexadecimale cijfer te vervangen door het corresponderende blok van vier binaire cijfers.

Je kunt rechtstreeks van binaire naar hexadecimale notatie door het binair genoteerde getal van rechts naar links te verdelen in blokken van vier cijfers en vervolgens elk blok om te rekenen naar een hexadecimaal cijfer.

28. Mai Gehrke: 0243653220

Dion Coumans: 0243652872

29. i.  $256 \cdot 256 \cdot 256 = 2^{24}$

ii. Bijvoorbeeld: rood FF0000, paars FF00FF, zwart 000000, grijs 7F7F7F

iii. Bijvoorbeeld: 00FFFF, FF00FF en FFFF00

30. -

31. Stel dat het rijtje cijfers  $a_1a_2 \dots a_n$  een geldige streepjescode is. Bereken: drie keer de som van de cijfers op de even posities plus de som van de cijfers op de oneven posities. De uitkomst hiervan noemen we de controlewaarde van  $a_1a_2 \dots a_n$ . Aangezien  $a_1a_2 \dots a_n$  een geldige streepjescode is, is deze controlewaarde deelbaar door 10. Als we één van de cijfers in het rijtje vervangen door een ander cijfer, is er een aantal mogelijkheden voor de nieuwe controlewaarde: De nieuwe controlewaarde is de oude controlewaarde plus of min een getal tussen 1 en 9 (er is een cijfer op een oneven positie veranderd) of de nieuwe controlewaarde is de oude controlewaarde plus of min een drie maal een getal tussen 1 en 9 (er is een cijfer op een even positie veranderd). In alle gevallen is de nieuwe controlewaarde niet deelbaar door tien, doordat de getallen tussen 1 en 9 niet deelbaar zijn door tien en ook drie maal een getal tussen 1 en 9 niet deelbaar is door tien. Dus het nieuwe rijtje is geen geldige streepjescode.
32. Als we beginnen met een twaalfcijferige code  $a_1a_2 \dots a_{12}$ , dan kunnen we die als volgt aanvullen tot een geldige streepjescode: Bereken  $3 \cdot (a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12}) + a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11}$  en noem de uitkomst  $x$ . Er bestaat een getal  $y$  tussen 0 en 9 zodat  $x + y$  deelbaar is door tien. Het rijtje  $a_1a_2 \dots a_{12}y$  is een geldige streepjescode.
33. Bijvoorbeeld 277000000000 en 727000000000 zijn beide geldige streepjescodes. In het algemeen geldt: Als het verschil tussen de twee naast elkaar gelegen cijfers 5 is, dan levert het verwisselen van de twee cijfers weer een geldige streepjescode.
34. Nee, het rijtje 000000006 is bijvoorbeeld niet aan te vullen tot een geldige ISBN code.
35. Stel dat  $a_1 \dots a_{10}$  een geldige ISBN-code is. Bereken  $10 \cdot a_1 + 9 \cdot a_2 + \dots + 1 \cdot a_{10}$  en noem dit de controlewaarde van  $a_1 \dots a_{10}$ . Vervangen we één cijfer door een ander cijfer en berekenen we de nieuwe controlewaarde, dan is dit de oude controlewaarde plus of min (plaats van de verandering) · (verschil tussen oude en nieuwe waarde). De plaats van de verandering is een getal tussen 1 en 10 en het verschil is een getal tussen 1 en 9. In alle gevallen is de nieuwe controlewaarde niet deelbaar door elf.
36. Bij het verwisselen van twee naast elkaar gelegen cijfers is het verschil tussen de oude en de nieuwe controlewaarde het verschil tussen de twee cijfers. Dit verschil is een getal tussen 1 en 9 (als de twee cijfers niet hetzelfde zijn). Als de oorspronkelijke controlewaarde deelbaar is door elf, dan is de nieuwe controlewaarde niet deelbaar door elf.