Oneindige spelen

Dion Coumans

Begeleider: dr. W. Veldman

Inhoudsopgave

1 Voorwoord

Banach, Mazur en Ulam zijn drie wiskundigen die aan het begin van de 20^e eeuw aan de Universiteit van Lwów in Polen werkten. Zij kwamen regelmatig met anderen bijeen in 'The Scottish Café' om te discussiëren over wiskundige problemen. Banach kwam met het idee een notitieblok te kopen en bij de ober in bewaring te geven. Telkens als er een interessant probleem (of oplossing) ter sprake kwam, werd dit in het notitieblok genoteerd. Deze problemen zijn gebundeld in 'The Scottish Book'.
Mazur formuleerde een probleem over het volgende spel:
Zij $E \subseteq \mathbb{R}$. Eerst kiest Speler I een niet leeg interval d_0, vervolgens kiest Speler II een niet leeg interval d_1 bevat in d_0, daarna kiest Speler I een niet leeg interval d_2 bevat in $d_1, \ldots$. Als de doorsnede van de zo ontstane rij intervallen een punt van E bevat wint Speler I, anders wint Speler II.
Hiermee gaf Mazur als eerste een definitie van een oneindig spel. Ulam en Banach hebben later varianten op dit spel geformuleerd.

In deze scriptie bekijken we een oneindige spel dat verwant is met het spel van Mazur en veel overeenkomt met de variant van Ulam. Dit spel wordt genoteerd als $G_X(A)$. Hierbij is X een niet-lege verzameling en A een deelverzameling van $X^{\mathbb{N}}$. De twee spelers kiezen elementen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ van X.
Speler I kiest eerst a_0, vervolgens kiest Speler II a_1, I kies a_2, II kiest a_3, ...
Zo vormen ze samen een element $\alpha = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ van $X^{\mathbb{N}}$.
Speler I wint het spel als α een element is van A en Speler II wint als α geen element is van A.
Men kan zich afvragen of dit spel 'vooruitbeslist' is. Dat wil zeggen dat één van beide spelers zo kan spelen dat hij wint ongeacht de speelwijze van de andere speler. Het antwoord op deze vraag is afhankelijk van de verzamelingen X en A. We zullen voor verschillende klassen van verzamelingen C laten zien dat $G_X(A)$, danwel $G_{\mathbb{N}}(A)$, vooruitbeslist is voor alle A in C. We sluiten af met enkele opmerkingen over de vraag: "Is $G_{\mathbb{N}}$ vooruitbeslist voor elke verzameling A?".

2 Definities

We voeren eerst een aantal begrippen en notaties in. Bij onderstaande definities is X een willekeurige niet-lege verzameling.

Zij $\alpha = (a_0, a_1, a_2, \dots) \in X^{\mathbb{N}}$ en $m \in \mathbb{N}$
$\boldsymbol{\bar{\alpha}(m)} \underset{D}{=} \langle\, a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1} \rangle$, de eerste m termen van α.
Als er geen verwarring mogelijk is, worden de haakjes weggelaten.

Zij $\alpha = (a_0, a_1, a_2, \dots) \in X^{\mathbb{N}}$. α is een functie: $\mathbb{N} \to X$.
Er geldt: $\alpha(m) = a_m$.

Zij r, s eindige rijtjes: $r = \langle\, r_0, \dots, r_m \,\rangle$, $s = \langle\, s_0, \dots, s_n \rangle$
Zij $\alpha = (a_0, a_1, a_2, \dots) \in X^{\mathbb{N}}$
$\boldsymbol{r * s} \underset{D}{=} \langle r_0, \dots, r_m, s_0, \dots, s_n \,\rangle$
$\boldsymbol{r * \alpha} \underset{D}{=} (r_0, \dots, r_m, a_0, a_1 \dots)$

Zij s een eindig rijtje: $s = \langle\, s_0, \dots, s_n \,\rangle$. We noemen $t = \langle\, t_0, \dots, t_m \,\rangle$ een **beginstuk** van s als er $x_0, \dots, x_k$ zijn zodat $s = \langle\, t_0, \dots, t_m, x_0, \dots, x_k \,\rangle$ of als $t = s$.
Notatie: $\boldsymbol{t \sqsubseteq s}$.

Een **strategie** vertelt een speler wat hij op elk keuzemoment in een spel moet doen. Voor Speler I is dit een functie $\sigma : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^{2n} \to X$
Hierbij is $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^{2n}$ de verzameling van alle eindige rijtjes van even lengte in X.
Aan elk eindig rijtje b van even lengte in X wordt een element uit X toegevoegd. Dat is het element dat Speler I volgens strategie σ moet kiezen als hij in een spelsituatie komt waarin het tot dan toe gevormde rijtje er uitziet als b.

Voor $\alpha \in X^{\mathbb{N}}$ en σ een strategie definiëren we:
$\boldsymbol{\alpha E_I \sigma} \underset{D}{=} \forall n \in \mathbb{N}\, [\, \alpha(2n) = \sigma(\bar{\alpha}(2n))\,]$
Dit betekent dat Speler I zich bij het speler van α houdt aan strategie σ. We zeggen ook wel: **$\boldsymbol{\alpha}$ is gespeeld volgens $\boldsymbol{\sigma}$**.

Op soortgelijke wijze is een strategie voor Speler II een functie $\tau : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^{2n+1} \to X$.
En $\boldsymbol{\alpha E_{II} \tau} \underset{D}{=} \forall n \in \mathbb{N}[\, \alpha(2n+1) = \tau(\bar{\alpha}(2n+1))\,]$

De verzameling van alle strategieën voor Speler I in $X^{\mathbb{N}}$ noemen we $\boldsymbol{Strat_I(X^{\mathbb{N}})}$ en voor Speler II $\boldsymbol{Strat_{II}(X^{\mathbb{N}})}$.

We noemen een spel **vooruitbeslist** als één van beide spelers een winnende strategie heeft. Dat wil zeggen:

$$\exists\sigma\in Strat_I(X^{\mathbb{N}})\,\forall\alpha\in X^{\mathbb{N}}\,[\,\alpha E_I\sigma \;\Rightarrow\; \alpha\in A\,]\vee\exists\tau\in Strat_{II}(X^{\mathbb{N}})\,\forall\alpha\in X^{\mathbb{N}}\,[\,\alpha E_{II}\tau \;\Rightarrow\; \alpha\notin A\,]$$

In woorden: er is een strategie σ zodat Speler I altijd wint of er is een strategie τ zodat Speler II altijd wint, beide ongeacht de speelwijze van de tegenstander.

3 A is aftelbaar

In de volgende paragrafen bewijzen we voor verschillende deelverzamelingen A van $X^{\mathbb{N}}$ dat het spel $G_X(A)$ vooruitbeslist is. Allereerst bekijken we aftelbare verzamelingen A.

Stelling 1 Voor elke niet-lege verzameling X geldt:
Als $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$ aftelbaar is, dan is $G_X(A)$ vooruitbeslist.

Bewijs
We bekijken eerst het geval: X heeft één element. De spelers hebben geen keus. Zij moeten elke beurt dat ene element van X kiezen. Speler I wint als A niet de lege verzameling is (dan $A = \{(x, x, x, \dots)\}$, waarbij x het ene element van X is). Speler II wint als A wel de lege verzameling is.

Nu nemen we aan dat X meer dan één element bevat.
Bewering: Speler II heeft altijd een winnende strategie.

> A is een aftelbare verzameling. Dus er is een rij elementen $x_0, x_1, x_2, \dots$ van $X^{\mathbb{N}}$ zodat $A = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$.
> $x_i \in X^{\mathbb{N}}$ dus $x_i = (x_i(0), x_i(1), \dots)$ met $x_i(j) \in X$ voor alle i, j.
> Tijdens het spel maken spelers I en II samen $\alpha = (a_0, a_1, a_2, \dots)$.
> Aangezien X meer dan één element bevat, kan Speler II a_{2i+1} zo kiezen dat $a_{2i+1} \neq x_i(2i+1)$
> Dan geldt voor alle i: $\alpha(2i+1) \neq x_i(2i+1)$
> Dus: $\alpha \neq x_i$ voor alle $i \in \mathbb{N}$
> Dus: $\alpha \notin A$
> Dus: Speler II wint.

$G_X(A)$ is vooruitbeslist. $\square$

4 Gale-Stewart-stelling

Een deelverzameling A van $X^{\mathbb{N}}$ heet **open** als er een deelverzameling B van $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X^n$ bestaat met: $\forall \alpha \in X^{\mathbb{N}} \, [\, \alpha \in A \Leftrightarrow \exists n \, [\, \bar{\alpha}n \in B \,]\,]$
B bestaat uit rijtjes van eindige lengte. Bij elk element α uit A kun je een n vinden zodat $\bar{\alpha}n \in B$. En omgekeerd: als je bij een α uit $X^{\mathbb{N}}$ een n kunt vinden zodat $\bar{\alpha}n \in B$, dan $\alpha \in A$.
Een deelverzameling B van $X^{\mathbb{N}}$ heet **gesloten** als zijn complement ($=\{\alpha \mid \alpha \in X^{\mathbb{N}} \mid \alpha \notin B\}$) open is.

Ook voor alle open verzamelingen A is het spel $G_X(A)$ vooruitbeslist. Dit is in 1953 bewezen door David Gale en Frank Stewart. In het bewijs bekijken zij niet alleen het spel $G_X(A)$, maar ook het spel dat we zullen noteren met $G_X^s(A)$. Hierbij beginnen de spelers vanuit een bepaalde **voorgeschreven startpositie** $s \in X^{2n}$. Waarna ze, net als bij $G_X(A)$, afwisselend $a_0, a_1, \ldots$ kiezen. Voor dit spel geldt:

$$\text{I wint } (a_0, a_1, \ldots) \Leftrightarrow (s(0), s(1), \ldots, s(2n-1), a_0, a_1, \ldots) \in A$$

$$\text{II wint } (a_0, a_1, \ldots) \Leftrightarrow (s(0), s(1), \ldots, s(2n-1), a_0, a_1, \ldots) \notin A$$

We noemen de positie s **gewonnen-voor-I**, als Speler I een winnende strategie heeft voor het spel $G_X^s(A)$ en definiëren analoog **gewonnen-voor-II**.

Stelling 2 (Gale-Stewart) Voor elke verzameling X geldt:
Als A $\subseteq X^{\mathbb{N}}$ open is, dan is $G_X(A)$ vooruitbeslist.

Bewijs
Zij $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$ open. Dan is er een deelverzameling B van $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X^n$ met:

$$\forall \alpha \in X^{\mathbb{N}} \, [\, \alpha \in A \Leftrightarrow \exists n \, [\, \bar{\alpha}n \in B \,]\,]$$

Zij $s \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X^n$

(1) *Bewering* Als er een beginstuk t van s bestaat met $t \in B$ dan is s gewonnen-voor-I.

Zij β het element dat de spelers uiteindelijk hebben gevormd vanuit beginpositie s. Dan geldt $\beta = (s_0, \ldots, s_n, a_0, a_1, \ldots)$.
Zij t van lengte m. Aangezien t een beginstuk is van s geldt:
$\bar{\beta}m = \langle\, s_0, \ldots, s_{m-1} \,\rangle = t \in B$
Uit de definitie van B volgt: $\beta \in A$.
Dit is onafhankelijk van de speelwijze van beide spelers. Dus speler I wint altijd.

(2) *Bewering* Als: $\exists x \in X\, \forall y \in X\, [\, s * \langle\, x, y\,\rangle$ is gewonnen-voor-I $]$, dan is s gewonnen-voor-I.

Speler I kan een element x kiezen zodat hij, ongeacht de keuze van Speler II, in zijn volgende beurt een winnende strategie heeft. Dan heeft hij direct een winnende strategie, namelijk:
Hij kiest eerst x en volgt na de keuze van Speler II zijn winnende strategie voor de nieuwe situatie.
Dus s is gewonnen-voor-I.
Merk op dat het keuze-axioma nodig is om een winnende strategie voor Speler I te geven. Voor elke reactie van Speler II op x moet een vervolgstrategie worden gekozen.

Als $G_X(A)$ gewonnen-voor-I is, dan is $G_X(A)$ vooruitbeslist.
Neem aan dat $G_X(A)$ niet gewonnen-voor-I is. Dan is $\langle\ \rangle$ niet gewonnen-voor-I.
We construeren een winnende strategie voor Speler II.

We maken een strategie τ voor Speler II zodat voor elk eindig rijtje $s \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X^{2n}$ geldt: als s gespeeld is volgens τ dan is s niet gewonnen-voor-I. We zullen vervolgens zien dat dit is een winnende strategie is voor Speler II.
Ter herinnering: $\tau : \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X^{2n+1} \to X$.

We definiëren τ stap voor stap. Eerst voor eindige rijtjes van lengte 1, dan voor eindige rijtjes van lengte 3, ...

stap 1 : $\langle\ \rangle$ is niet gewonnen-voor-I.
Dan geldt volgens *(2)*:

$$\neg \exists x \in X\, \forall y \in X\, [\, \langle\, x, y\,\rangle \text{ is gewonnen-voor-I}\,]$$

Dus:

$$\forall x \in X\, \exists y \in X\, [\, \langle\, x, y\,\rangle \text{ is niet gewonnen-voor-I}\,]$$

Bepaal voor elke $x \in X$ een y zodat $\langle\, x, y\,\rangle$ niet gewonnen-voor-I is en definieer: $\tau(\langle\, x\,\rangle) = y$.

stap $\mathbf{n+1}$: Zij $s \in X^{2n}$ gespeeld volgens τ
Dan is s niet gewonnen-voor-I.
Dan geldt volgens *(2)*:

$$\neg \exists x \in X\, \forall y \in X\, [\, s * \langle\, x, y\,\rangle \text{ is gewonnen-voor-I}\,]$$

Dus:

$$\forall x \in X\, \exists y \in X\, [\, s * \langle\, x, y\,\rangle \text{ is niet gewonnen-voor-I}\,]$$

Bepaal voor elke $x \in X$ een y zodat $s * \langle\, x, y\,\rangle$ niet gewonnen-voor-I is en definieer: $\tau(s * \langle\, x\,\rangle) \underset{D}{=} y$.

Merk op dat in elke stap het keuze-axioma nodig is om de strategie te definiëren. τ is nog niet voor alle eindige rijtjes gedefinieerd, maar alleen voor rijtjes die volgens τ zijn gespeeld. Dit zijn echter de enige rijtjes die van belang zijn. We kunnen voor alle andere eindige rijtjes s definiëren: $\tau(s) = x$, met x een willekeurig element van X.

Uit de definitie van τ volgt:

$$\forall \alpha \in X^{\mathbb{N}} [\, \alpha E_{II} \tau \;\Rightarrow\; \forall n \in \mathbb{N} [\, \bar{\alpha} 2n \text{ is niet gewonnen-voor-I} \,]\,]$$

Aangezien $\bar{\alpha}n$ een beginstuk van $\bar{\alpha}2n$ is, volgt uit *(1)*: als $n \in \mathbb{N}$ en $\bar{\alpha}n \in B$ dan is $\bar{\alpha}2n$ gewonnen-voor-I.

Dus:

$$\forall \alpha \in X^{\mathbb{N}} [\, \alpha E_{II} \tau \;\Rightarrow\; \forall n \in \mathbb{N} [\, \bar{\alpha} n \notin B \,]\,]$$

Dus:

$$\forall \alpha \in X^{\mathbb{N}} [\, \alpha E_{II} \tau \;\Rightarrow\; \neg \exists n \in \mathbb{N} [\, \bar{\alpha} n \in B \,]\,]$$

Dus:

$$\forall \alpha \in X^{\mathbb{N}} [\, \alpha E_{II} \tau \;\Rightarrow\; \alpha \notin A \,]\,]$$

Dus: τ is een winnende strategie voor Speler II en $G_X(A)$ is gewonnen-voor-II.

$G_X(A)$ is vooruitbeslist. $\square$

Nu we weten dat het spel voor alle open deelverzamelingen A vooruitbeslist is, kunnen we ook afleiden dat $G_X(A)$ voor alle gesloten deelverzamelingen A vooruitbeslist is.

Stelling 3 Voor elke verzameling X geldt: Als A $\subseteq X^{\mathbb{N}}$ gesloten is, dan is $G_X(A)$ vooruitbeslist.

Bewijs
Zij $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$ gesloten. Voor alle $x \in X$ kunnen we het spel $G_X^{\langle x \rangle}(A)$ bekijken. Dit is het spel waarbij Speler II begint vanuit de voorgeschreven startpositie $\langle\, x \,\rangle$. Speler II wint als $(x, a_0, a_1, \ldots) \notin A$ (dus als $(x, a_0, a_1, \ldots) \in A^c$), en anders wint Speler I.
A is gesloten dus A^c is open. Uit *Stelling 2* volgt: $G_X^{\langle x \rangle}(A)$ is vooruitbeslist.
Dus één van beide spelers heeft een winnende strategie voor $G_X^{\langle x \rangle}(A)$.

We keren terug naar $G_X(A)$ en onderscheiden twee gevallen:

1. $\forall x \in X\,[\,G_X^{\langle x \rangle}(A)$ is gewonnen-voor-II$\,]$
   Speler II wint altijd ongeacht de keuze van Speler I in beurt 1, dus $G_X(A)$ is gewonnen-voor-II.
   Merk op dat het keuze-axioma nodig is om een winnende strategie voor Speler II te geven.

2. $\neg\forall x \in X\,[\,G_X^{\langle x \rangle}(A)$ is gewonnen-voor-II$\,]$
   Er is een x met niet: $G_X^{\langle x \rangle}(A)$ is gewonnen-voor-II.
   Aangezien $G_X^{\langle x \rangle}$ vooruitbeslist is, is $G_X^{\langle x \rangle}(A)$ gewonnen-voor-I.
   Dan heeft Speler I een winnende strategie voor $G_X(A)$, namelijk:
   Hij kiest eerst deze x en volgt daarna de winnende strategie voor $G_X^{\langle x \rangle}(A)$.
   $G_X(A)$ is gewonnen-voor-I.

$G_X(A)$ is vooruitbeslist. $\square$

5 Stelling van Wolfe

In de vorige paragrafen hebben we gekeken naar willekeurige niet-lege verzamelingen X. Nu beperken we ons tot de natuurlijke getallen en bekijken het spel $G_{\mathbb{N}}(A)$.
We hebben al gezien dat voor alle open en gesloten verzamelingen A $G_{\mathbb{N}}(A)$ vooruitbeslist is. Nu behandelen we het geval: A is een aftelbare vereniging van gesloten verzamelingen. De collectie van deze verzameling wordt ook wel genoteerd met Σ_0^2. In 1955 heeft Philip Wolfe bewezen dat ook deze spelen vooruitbeslist zijn. We bespreken hieronder eerst zijn bewijs. Aan het eind van deze paragraaf volgt een ander bewijs van de stelling van Wolfe.

We definiëren:
Seq $\underset{D}{=}$ de verzameling van alle eindige rijtjes natuurlijke getallen.

Stelling 4 (Wolfe) Voor alle $A \subseteq \mathbb{N}$ met $A \in \Sigma_0^2$ geldt: $G_{\mathbb{N}}(A)$ is vooruitbeslist.

Bewijs
Zij A een aftelbare vereniging van gesloten deelverzamelingen van $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Bepaal een rij gesloten deelverzameligen $A_0, A_1, \ldots$ van $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ met $A = \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} A_m$.
Definieer voor alle $m \in \mathbb{N}$: $C_m \underset{D}{=} \{\bar{\alpha}2n \,|\, n \in \mathbb{N} \,|\, \alpha \in A_m\}$.
Zo krijgen we een rij $C_0, C_1, \ldots$ van deelverzamelingen van Seq met:

$$\forall m \in \mathbb{N}\, \forall \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\, [\, \alpha \in A_m \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\, [\, \bar{\alpha}2n \in C_m\,]\,]$$

Uit *Stelling 3* volgt: Voor elke $s \in$ Seq met lengte(s) is even en elke $m \in \mathbb{N}$ is $G^s_{\mathbb{N}}(A_m)$ vooruitbeslist.

Definieer:

$$W_0 = \{s \,|\, s \in \text{Seq} \,|\, \text{lengte(s) is even en} \, \exists m \in \mathbb{N}\, [\, G^s_{\mathbb{N}}(A_m) \text{is gewonnen-voor-I}\,]\}$$

(3) *Bewering* $\forall s\, [\, s \in W_0 \Rightarrow G^s_{\mathbb{N}}(A)$is gewonnen-voor-I$\,]$

> $A = \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} A_m$. Als Speler I een winnende strategie heeft voor $G^s_{\mathbb{N}}(A_m)$, dan wint hij ook $G^s_{\mathbb{N}}(A)$ door diezelfde strategie te volgen.

Zij $W \subseteq \{s \,|\, s \in \text{Seq} \,|\, \text{lengte(s) is even}\}$ zodat:

(I) $\forall s \in W\, [\, G^s_{\mathbb{N}}(A)$is gewonnen-voor-I$\,]$

en:

(II) $\forall s \in W\, [\, G^s_{\mathbb{N}}(\{\alpha \,|\, \forall n\, [\, 2n \geq \text{lengte}(s) \Rightarrow \bar{\alpha}2n \in W\,]\})$ is gewonnen voor I$\,]$

Definieer voor alle $m \in \mathbb{N}$ een verzameling A^*_m door:

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} [\, \alpha \in A^*_m \Leftrightarrow \forall n [\, \bar{\alpha}2n \in C_m \vee \bar{\alpha}2n \in W \,]\,]$$

Bewering A^*_m is gesloten voor alle $m \in \mathbb{N}$

We moeten laten zien: $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \backslash A^*_m$ is open.
We zoeken een B met:

$$\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \backslash A^*_m \Leftrightarrow \exists n [\, \bar{\alpha}n \in B \,]$$

Bekijk: $B = \{s \mid s \in \text{Seq} \mid \text{lengte}(s) \text{ is even} \mid s \in (\text{Seq} \backslash C_m) \cap (Seq \backslash W)\}$

$\Rightarrow$ Neem aan: $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \backslash A^*_m$
Dan $\alpha \notin A^*_m$
Dan is er een n met $\bar{\alpha}2n \notin C_m$ en $\bar{\alpha}2n \notin W$
Dan $\bar{\alpha}2n \in B$

$\Leftarrow$ Neem aan: $\exists n [\, \bar{\alpha}n \in B \,]$
Dan is n even, zeg $n = 2k$, en $\bar{\alpha}2k \notin C_m$ en $\bar{\alpha}2k \notin W$
Dus: $\alpha \notin A^*_m$
Dus: $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \backslash A^*_m$

A^*_m is gesloten voor alle m.

Uit *Stelling 3* volgt dat $G^s_{\mathbb{N}}(A^*_m)$ vooruitbeslist is voor elke $s \in \text{Seq}$ van even lengte.

We definiëren:

$$W^+ = \{s \mid s \in \text{Seq} \mid \text{lengte(s) is even en} \, \exists m \in \mathbb{N} [\, G^s_{\mathbb{N}}(A^*_m) \text{is gewonnen-voor-I} \,]\}$$

(4) *Bewering* $W \subseteq W^+$

Zij $s = \langle\, s_0, \ldots, s_{2n-1} \,\rangle \in W$. Te bewijzen: $s \in W^+$.
Aangezien $s \in W$ is $G^s_{\mathbb{N}}(A)$ gewonnen-voor-I.
Dan is er een rij $a_0, a_1, \ldots$ zodat $(s_0, \ldots, s_{2n-1}, a_0, a_1, \ldots) \in A$.
Bepaal $m \in \mathbb{N}$ zodat $(s_0, \ldots, s_{2n-1}, a_0, a_1, \ldots) \in A_m$
Uit de definitie van C_m volgt: $\langle\, s_0, \ldots, s_{2k-1} \,\rangle \in C_m$ voor alle $k \leq n$.

Aangezien $s \in W$ is $G^s_{\mathbb{N}}(\{\alpha \mid \forall n [\, 2n \geq \text{lengte}(s) \Rightarrow \bar{\alpha}2n \in W \,]\})$ gewonnen-voor-I.
Dus Speler I heeft een strategie σ zodat:

$$\alpha E_I \sigma \Rightarrow s * \alpha \in \{\alpha \mid \forall n [\, 2n \geq \text{lengte}(s) \Rightarrow \bar{\alpha}2n \in W \,]\}$$

Hieruit volgt:

$$\alpha E_I \sigma \;\Rightarrow\; \overline{s * \alpha} 2k \in W \text{ voor alle } k > n$$

We hebben gezien:

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \, [\, \overline{s * \alpha} 2k \in C_m \text{ voor alle } k \leq n \,]$$

Dus:

$$\alpha E_I \sigma \;\Rightarrow\; s * \alpha \in A_m^*$$

Dus: $G_{\mathbb{N}}^s(A_m^*)$ is gewonnen-voor-I.
Dus: $s \in W^+$
$W \subseteq W^+$

(5) *Bewering* $\forall s \in W^+ \, [\, G_{\mathbb{N}}^s(A)$is gewonnen-voor-I$\,]$

Stel $s \in W^+$. Dan is $G_{\mathbb{N}}^s(A_m^*)$ gewonnen-voor-I. Speler I heeft een winnende strategie voor $G_{\mathbb{N}}^s(A_m^*)$. Zij α het element dat ontstaat als hij deze strategie volgt. Er zijn twee mogelijkheden:

(i). $\forall n \, [\, \bar{\alpha} 2n \in C_m \,]$
Dan geldt $\alpha \in A_m$
Dus $\alpha \in A$
Dus dit is een winnende strategie voor $G_{\mathbb{N}}^s(A)$ voor Speler I.

(ii). $\neg \forall n \, [\, \bar{\alpha} 2n \in C_m \,]$
Dan is er een n met $\bar{\alpha} 2n \notin C_m$
Dan geldt: $\bar{\alpha} 2n \in W$
De winnende strategie voor $G_{\mathbb{N}}^s$ is dan:
Volg eerst de winnende strategie voor $G_{\mathbb{N}}^s(A_m^s)$ totdat je buiten C_n en dus in W belandt. Schakel dan over op een winnende strategie voor $G_{\mathbb{N}}^{\bar{\alpha} 2n}(A)$.

In beide gevallen heeft Speler I een winnende strategie voor $G_{\mathbb{N}}^s(A)$

We definiëren een collectie $\mathcal{Z}$ van winstperspectieven-voor-I door:

1. $W_0 \in \mathcal{Z}$
2. Als $W \in \mathcal{Z}$ dan $W^+ \in \mathcal{Z}$
3. Als $U_0, U_1, \ldots \in \mathcal{Z}$, dan $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \in \mathcal{Z}$
4. Dit levert alle elementen van $\mathcal{Z}$

We bewijzen met inductie naar de opbouw van $\mathcal{Z}$ dat alle elementen van $\mathcal{Z}$ eigenschappen I en II hebben.

(I). Definieer $P(W) \underset{D}{=} \forall s \in W\, [\, G_{\mathbb{N}}(A)$ is gewonnen-voor-I $]$
Te bewijzen: $\forall W \in \mathcal{Z}\, [\, P(W)\,]$

(1) $P(W_0)$
Bewezen bij *(*3).

(2) $P(W) \Rightarrow P(W^+)$
Bewezen bij *(*5).

(3) $P(U_0), P(U_1), \ldots \Rightarrow P(\bigcup U_n)$
Stel $s \in \bigcup U_n$. Dan is er een n met $s \in U_n$.
Voor alle $s \in U_n$ geldt: $G^s_{\mathbb{N}}(A)$ is gewonnen-voor-I.
Dus $G^s_{\mathbb{N}}(A)$ is gewonnen-voor I.

Alle $W \in \mathcal{Z}$ hebben eigenschap I.

(II). Definieer $R(W) \underset{D}{=} \forall s \in W\, [\, G^s_{\mathbb{N}}(\{\alpha \mid \forall n\, [\, 2n \geq \text{lengte}(s) \Rightarrow \bar{\alpha}2n \in W\,]\})$ is gewonnen voor I $]$
Te bewijzen: $\forall W \in \mathcal{Z}\, [\, R(W)\,]$

(1) $R(W_0)$
Zij $s \in W_0$.
Bepaal $m \in \mathbb{N}$ zodat $G^s_{\mathbb{N}}(A_m)$ is gewonnen-voor-I.
Zij σ een winnende strategie voor speler I voor $G^s_{\mathbb{N}}(A_m)$.
Zij $\alpha = (a_0, a_1, \ldots) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ met $\alpha E_I \sigma$.
Dan is voor alle $n \in \mathbb{N}$: $G^{s*\langle\, a_0,\ldots a_{2n-1}\,\rangle}_{\mathbb{N}}(A_m)$ gewonnen-voor-I. Speler I wint namelijk door strategie σ te volgen.
Hieruit volgt: $s * \langle\, a_0, \ldots a_{2n-1} \rangle \in W_0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
Dus: $\alpha E_I \sigma \Rightarrow \overline{s * \alpha} 2n \in W_0$ als $2n \geq \text{lengte}(s)$.
Dus: $G^s_{\mathbb{N}}(\{\alpha \mid \forall n\, [\, 2n \geq \text{lengte}(s) \Rightarrow \bar{\alpha}2n \in W_0\,]\})$ is gewonnen voor I.

(2) $R(W) \Rightarrow R(W^+)$
Zij $s \in W^+$.
Bepaal $m \in \mathbb{N}$ zodat $G^s_{\mathbb{N}}(A^*_m)$ is gewonnen-voor-I.
Het bewijs loopt verder analoog aan het bewijs voor W_0.

(3) $R(U_0), R(U_1), \ldots \Rightarrow R(\bigcup U_n)$
Zij $s \in \bigcup U_n$. Bepaal $n \in \mathbb{N}$ met $s \in U_n$.
$G^s_{\mathbb{N}}(\{\alpha \mid \forall n\, [\, 2n \geq \text{lengte}(s) \Rightarrow \bar{\alpha}2n \in U_n\,]\})$ is gewonnen-voor-I.
Speler I wint $G^s_{\mathbb{N}}(\{\alpha \mid \forall n\, [\, 2n \geq \text{lengte}(s) \Rightarrow \bar{\alpha}2n \in \bigcup U_n\,]\})$ door dezelfde strategie te volgen.

Alle $W \in \mathcal{Z}$ hebben eigenschap II.

Definieer $\mathbb{W} \underset{D}{=} \bigcup \mathcal{Z} = \{s \mid s \in \mathrm{Seq} \mid \exists W \in \mathcal{Z}\, [\, s \in W\,]\}$

Bewering $\mathbb{W} \in \mathcal{Z}$

Seq is aftelbaar.
$\mathbb{W} \subset \mathrm{Seq}$. Dus ook $\mathbb{W}$ is aftelbaar. Zeg $\mathbb{W} = \{w_0, w_1, \ldots\}$.
Bepaal $U_0, U_1, \ldots$ elementen van $\mathcal{Z}$ met: $\forall n \in \mathbb{N}\, [\, w_n \in U_n\,]$.
Dan: $\mathbb{W} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$.
Dus: $\mathbb{W} \in \mathcal{Z}$

Bewering $\mathbb{W} = \mathbb{W}^+$

- $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{W}^+$
  Bewezen bij (3)
- $\mathbb{W}^+ \subseteq \mathbb{W}$
  $\mathbb{W} \in \mathcal{Z}$ dus ook $\mathbb{W}^+ \in \mathcal{Z}$ (definitie $\mathcal{Z}$)
  Stel $s \in \mathbb{W}^+$
  Volgens de definitie van $\mathbb{W}$ geldt dan $s \in \mathbb{W}$
  Dus $\mathbb{W}^+ \subseteq \mathbb{W}$

$\mathbb{W}^+ = \mathbb{W}$

We onderscheiden twee gevallen:

(i). $\langle\ \rangle \in \mathbb{W}$
Bewering: $G_{\mathbb{N}}(A)$ is gewonnen-voor-I

$\mathbb{W} \in \mathcal{Z}$. Dus $\mathbb{W}$ heeft eigenschap I.
Hieruit volgt: voor alle $s \in \mathbb{W}$ is $G^s_{\mathbb{N}}(A)$ gewonnen-voor-I.
$\langle\ \rangle \in \mathbb{W}$, dus $G_{\mathbb{N}}(A)$ is gewonnen-voor-I.

(ii). $\langle\ \rangle \notin \mathbb{W}$
Bewering: $G_{\mathbb{N}}(A)$ is gewonnen-voor-II.

We bouwen stap voor stap een winnende strategie voor Speler II op.

Bekijk:

$$A_0^* = \{\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\, [\, \bar{\alpha}2n \in C_0 \vee \bar{\alpha}2n \in \mathbb{W}\,]\}$$

$\mathbb{W} = \mathbb{W}^+$ en $\langle\ \rangle \notin \mathbb{W}$. Dus $\langle\ \rangle \notin \mathbb{W}^+$.
Dan is er geen m met $G_{\mathbb{N}}(A_m^*)$ is gewonnen-voor-I (defintie W^+).
In het bijzonder is $G_{\mathbb{N}}(A_0^*)$ niet gewonnen-voor-I.
$G_{\mathbb{N}}(A_0^*)$ is vooruitbeslist (want A_0^* is gesloten).
Dus $G_{\mathbb{N}}(A_0^*)$ is gewonnen-voor-II.

Zij τ_0 een winnende strategie voor $G_{\mathbb{N}}(A_0^*)$.
Als Speler II deze strategie volgt, komen de spelers op een gegeven moment in een positie $\bar{\alpha}2n_0$ met: $\bar{\alpha}2n_0 \notin C_0 \wedge \bar{\alpha}2n_0 \notin \mathbb{W}$.
Bekijk:

$$A_1^* = \{\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} [\, \bar{\alpha}2n \in C_1 \vee \bar{\alpha}2n \in \mathbb{W} \,]\}$$

$\mathbb{W} = \mathbb{W}^+$ en $\bar{\alpha}2n_0 \notin \mathbb{W}$
Dus $\bar{\alpha}2n_0 \notin \mathbb{W}^+$.
Dan is $G_{\mathbb{N}}^{\bar{\alpha}2n_0}(A_1^*)$ niet gewonnen-voor-I.
$G_{\mathbb{N}}^{\bar{\alpha}2n_0}(A_1^*)$ is vooruitbeslist (want A_1^* is gesloten).
Dus $G_{\mathbb{N}}^{\bar{\alpha}2n_0}(A_1^*)$ is gewonnen-voor-II.

Zij τ_1 een winnende strategie voor $G_{\mathbb{N}}^{\bar{\alpha}2n_0}(A_1^*)$.
Als Speler II deze strategie volgt dan komen de spelers op een gegeven moment in een positie $\bar{\alpha}2n_1$ met: $\bar{\alpha}2n_1 \notin C_1 \wedge \bar{\alpha}2n_1 \notin \mathbb{W}$
Zo kunnen we verder gaan.

We vormen een strategie τ door:
Eerst τ_0 te volgen tot $\bar{\alpha}2n_0$, daarna τ_1 volgen tot $\bar{\alpha}2n_1$, ...
Dan geldt:

$$\forall m \in \mathbb{N} \, [\bar{\alpha}2n_m \notin C_m]$$

Dus:

$$\forall m \in \mathbb{N} \, [\alpha \notin A_m]$$

Dus $\alpha \notin A$ en τ is een winnende strategie voor Speler II voor $G_{\mathbb{N}}(A)$

$G_{\mathbb{N}}(A)$ is vooruitbeslist. □

In bovenstaand bewijs bekijken we onder andere de funtie die aan W, W^+ toevoegd. Voor deze functie geldt: $U \subseteq V \Rightarrow U^+ \subseteq W^+$. Een dergelijke functie noemen we een monotone functie. Tarski heeft de volgende stelling bewezen over monotone functies van $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ naar $\mathcal{P}(\mathbb{N})$:

Stelling 5 (Dekpuntenstelling van Tarski) Zij $F : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \Rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ met: $X \subseteq Y \Rightarrow F(X) \subseteq F(Y)$
Dan geldt:

(i). Er is een $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ met $F(X) = X$ en
$\forall Z \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : F(Z) = Z \Rightarrow X \subseteq Z$

(ii). Er is een $W \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ met $F(W) = W$ en
$\forall Z \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : F(Z) = Z \Rightarrow Z \subseteq W$

Bewijs

(i). We definiëren een collectie $\mathcal{A}$ door:

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$

(2) $Y \in \mathcal{A} \Rightarrow F(Y) \in \mathcal{A}$

(3) $Y_0, Y_1, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup Y_n \in \mathcal{A}$

(4) Dit levert alle elementen van $\mathcal{A}$

Bekijk $X = \bigcup \mathcal{A} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \mid \exists Y \in \mathcal{A}\, [n \in Y]\}$
$X \subseteq \mathbb{N}$ dus X is aftelbaar. Zeg $X = \{x_0, x_1, \ldots\}$
Bepaal $Y_0, Y_1, \ldots$ elementen van $\mathcal{A}$ met $\forall m \in \mathbb{N}\, [x_m \in Y_m]$.
Dan: $X = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} Y_m$
Dus: $X \in \mathcal{A}$

Bewering $X = F(X)$

- $X \subseteq F(X)$
  We bewijzen dat voor alle $Y \in \mathcal{A}$ geldt: $Y \subseteq F(Y)$. Dit doen we met inductie naar de opbouw van $\mathcal{A}$. Definieer $P(Y) \underset{D}{=} Y \subseteq F(Y)$

  (1) $P(\emptyset)$
  De lege verzameling is een deelverzameling van elke verzameling.
  In het bijzonder geldt: $\emptyset \subseteq F(\emptyset)$.
  Dus $P(\emptyset)$ geldt.

  (2) $P(Y) \Rightarrow P(F(Y))$
  Neem aan $Y \subseteq F(Y)$. Te bewijzen: $F(Y) \subseteq F(F(Y))$.
  Er geldt: $X \subseteq Y \Rightarrow F(X) \subseteq F(Y)$ (definitie F).
  $Y \subseteq F(Y)$ dus $F(Y) \subseteq F(F(Y))$.

  (3) $P(Y_0), P(Y_1), \ldots \Rightarrow P(\bigcup Y_n)$
  Neem aan $Y_0, Y_1, \ldots$ met $Y_n \subseteq F(Y_n)$ voor alle n.
  Te bewijzen: $\bigcup Y_n \subseteq F(\bigcup Y_n)$.
  $Y_n \subseteq \bigcup Y_n$ dus $F(Y_n) \subseteq F(\bigcup Y_n)$ voor alle n (definitie F).
  Verder geldt: $Y_n \subseteq F(Y_n)$ (aanname).
  Dus: $Y_n \subseteq F(\bigcup Y_n)$ voor alle n.
  Dan ook: $\bigcup Y_n \subseteq F(\bigcup Y_n)$

  Hieruit volgt $\forall Y \in \mathcal{A} : Y \subseteq F(Y)$.
  $X \in \mathcal{A}$. Dus in het bijzonder geldt: $X \subseteq F(X)$

- $F(X) \subseteq X$
  $X \in \mathcal{A}$ dus ook $F(X) \in \mathcal{A}$
  Stel $n \in F(X)$. Dan $n \in X$ (definitie X)
  Dus $F(X) \subseteq X$

Dus $X = F(X)$

Stel $Z = F(Z)$. Te bewijzen: $X \subseteq Z$.
We bewijzen dat voor alle $Y \in \mathcal{A}$ geldt: $Y \subseteq Z$. Dit doen we wederom met inductie naar de opbouw van $\mathcal{A}$.
Definieer $Q(Y) \underset{D}{=} Y \subseteq Z$

(1) $Q(\emptyset)$
De lege verzameling is een deelverzameling van elke verzameling.
In het bijzonder geldt: $\emptyset \subseteq Z$.

(2) $Q(Y) \Rightarrow Q(F(Y))$
Neem aan: $Y \subseteq Z$. Te bewijzen: $F(Y) \subseteq Z$
$Y \subseteq Z$ dus $F(Y) \subseteq F(Z) = Z$

(3) $Q(Y_0), Q(Y_1), \ldots \Rightarrow Q(\bigcup Y_n)$
Neem aan: $Y_0, Y_1, \ldots$ met $Y_n \subseteq Z$ voor alle n.
Dan ook: $\bigcup Y_n \subseteq Z$

Hieruit volgt $\forall Y \in \mathcal{A} : Y \subseteq Z$.
Aangezien $X \in \mathcal{A}$ geldt in het bijzonder: $X \subseteq Z$

(ii). We definiëren een collectie $\mathcal{B}$ door:

(1) $\mathbb{N} \in \mathcal{B}$

(2) $Y \in \mathcal{B} \Rightarrow F(Y) \in \mathcal{B}$

(3) $Y_0, Y_1, \ldots \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcap Y_n \in \mathcal{B}$

(4) Dit levert alle elementen van $\mathcal{B}$.

Definieer $W = \bigcap \mathcal{B} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \mid \forall Y \in \mathcal{B}\, [n \in Y]\}$
$\mathbb{N} \backslash W \subseteq \mathbb{N}$. Dus $\mathbb{N} \backslash W$ is aftelbaar. Zeg $\mathbb{N} \backslash W = \{a_0, a_1, \ldots\}$.
Zij $a_i \in \mathbb{N} \backslash W$.
Dan is er een $Y_i \in \mathcal{B}$ met $a_i \notin Y_i$ (zo niet, dan zou $a_i \in W$).
Bepaal $Y_0, Y_1, \ldots$ met $\forall i \in \mathbb{N}\, [\, a_i \notin Y_i \,]$
Dan geldt: $W = \bigcap Y_i$.
Dus $W \in \mathcal{B}$.

Net als in (i) kunnen we bewijzen $F(W) = W$ en voor alle $Z \in (P)(\mathbb{N}) : F(Z) = Z \Rightarrow Z \subseteq W$.

$\square$

Bij de definitie van $\mathcal{A}$ zijn we begonnen met de lege verzameling. We hadden ook met een willekeurige $X_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ met $X_0 \subseteq F(X_0)$ kunnen beginnen. Bovenstaande constructie had ons een verzameling X' geleverd met:

$$F(X') = X' \quad \text{en} \quad X_0 \subseteq X'$$

en

$$\forall Z \in \mathcal{P}(N): \quad F(Z) = Z \wedge X_0 \subseteq Z \quad \Rightarrow \quad X' \subseteq Z$$

Zo geldt voor $\mathbb{W}$ uit het bewijs van de stelling van Wolfe:

$$\mathbb{W}^+ = \mathbb{W} \quad \text{en} \quad W_0 \subseteq \mathbb{W}$$

en

$$\forall W \in \mathcal{P}(\mathrm{Seq}): \quad W^+ = W \wedge W_0 \subseteq W \quad \Rightarrow \quad \mathbb{W} \subseteq W$$

In 1975 heeft Donald Martin bewezen dat alle Borel-spelen vooruitbeslist zijn. Borel-spelen zijn spelen van de vorm $G_{\mathbb{N}}(A)$ waarbij A een Borel-verzameling is. De stelling van Wolfe is ook te bewijzen met een eenvoudige versie van de methode die Martin gebruikte voor Borel-spelen. Dat bewijs volgt hieronder.

Stelling 6 (Tweede bewijs van de stelling van Wolfe)
Voor alle $A \subseteq \mathbb{N}$ met $A \in \Sigma^2_0$ geldt: $G_{\mathbb{N}}(A)$ is vooruitbeslist.

Bewijs
Zij A een aftelbare vereniging van gesloten deelverzamelingen van $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. We bepalen wederom een rij gesloten deelverzamelingen $A_0, A_1, \ldots$ van $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ met $A = \bigcup A_m$. Bepaal een rij $C_0, C_1, \ldots$ van deelverzamelingen van Seq met:

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \, [\, \alpha \in A_m \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \, [\, \bar{\alpha} 2n \in C_m \,]\,]$$

en :

$$\forall a \in \mathrm{Seq} \, \forall b \in \mathrm{Seq} \, [\, (a \in C_m \wedge b \sqsubseteq a) \Rightarrow b \in C_m \,]$$

We definiëren een **schaduwspel** dat zich in een heel andere ruimte afspeelt. Dit spel gaat als volgt:

Speler I kiest een strategie $\sigma_0 \in Strat_I(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$
Speler II kiest een positie $a_0 \in \bigcup \mathbb{N}^{2n}, a_0 \neq \langle\, \rangle$
Speler I kiest een strategie $\sigma_1 \in Strat_I(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$
Speler II kiest een positie $a_1 \in \bigcup \mathbb{N}^{2n}$
...

Zo ontstaat een rij $(\sigma_0, a_0, \sigma_1, a_1, \ldots)$
Deze rij ligt in de verzameling $Y^{\mathbb{N}}$, waarbij $Y = Strat_I(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^{2n}$.
We spreken af: zodra één van beide spelers een object van de verkeerde soort kiest, verliest hij.

Speler II wint de ronde $(\sigma_0, a_0, \sigma_1, a_1, \ldots) \Leftrightarrow$

> a_0 gespeeld volgens $\sigma_0 \wedge a_0 \in C_0 \wedge a_0 \sqsubseteq a_1 \wedge$ bij het spelen van a_0 naar a_1 (in $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$) houdt I zich aan $\sigma_1 \wedge a_1 \notin C_1 \wedge a_1 \sqsubseteq a_2 \wedge$ bij het spelen van a_1 naar a_2 houdt I zich aan $\sigma_2 \wedge a_2 \notin C_2 \wedge \ldots$

Zij D de verzameling van rondes die Speler II wint.

Bewering D is gesloten

Te bewijzen: $Y^{\mathbb{N}} \backslash D$ is open.
Definieer:

$B = \{\langle \sigma_0, a_0 \rangle | \sigma_0 \notin Strat_I(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) \vee a_0 \notin \bigcup \mathbb{N}^{2n} \vee a_0$ niet gespeeld volgens $\sigma_0 \vee a_0 \notin C_0\} \cup$
$\{\langle \sigma_0, a_0, \sigma_1, a_1 \rangle | \sigma_1 \notin Strat_I(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) \vee a_1 \notin \bigcup \mathbb{N}^{2n} \vee$ niet : $a_0 \sqsubseteq a_1 \vee$ bij het spelen van a_0 naar a_1 (in $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$) houdt Speler I zich niet aan $\sigma_1 \vee a_1 \notin C_1\} \cup \ldots$

Dan geldt: $B \subseteq \bigcup Y^n$.
En: $\alpha \in Y^{\mathbb{N}} \backslash D \Leftrightarrow \exists n [\bar{\alpha} n \in B]$
D is gesloten.

Speler I wint als: $(\sigma_0, a_0, \sigma_1, a_1, \ldots) \notin D$
Speler II wint als: $(\sigma_0, a_0, \sigma_1, a_1, \ldots) \in D$
Uit *Stelling 2* volgt: het schaduwspel is vooruitbeslist.

We laten zien: de speler die een winnende strategie heeft voor het schaduwspel, heeft ook een winnende strategie voor $G_{\mathbb{N}}(A)$. We onderscheiden twee gevallen:

(i). *Speler I heeft een winnende strategie voor het schaduwspel*
Zij $\breve{\sigma}$ een winnende strategie voor het schaduwspel voor Speler I. We vormen nu een tactiek voor Speler I voor $G_{\mathbb{N}}(A)$:

Begin het spelen volgens $\sigma_0 = \breve{\sigma}(\langle\ \rangle)$
Blijf dit doen zolang de posities van even lengte die je passeert zich in C_0 bevinden. Kom je echter in een positie a_0 met $a_0 \notin C_0$, schakel dan over over op strategie $\sigma_1 = \breve{\sigma}(\langle \sigma_0, a_0 \rangle)$

Blijf σ_1 volgen zolang de posities van even lengte die je passeert zich C_1 bevinden. Komt je echter in een positie a_1 met $a_1 \notin C_1$, schakel dan over op strategie $\sigma_2 = \breve{\sigma}(\langle \sigma_0, a_0, \sigma_1, a_1 \rangle)$.
Ga zo verder.

Bewering Speler I wisselt bij deze strategie slechts eindig vaak van strategie

> Stel dat Speler I oneindig vaak van strategie wisselt.
> Bekijk de rij $(\sigma_0, a_0, \sigma_1, a_1, \ldots)$ in het schaduwspel. Deze is gespeeld volgens de winnende strategie $\breve{\sigma}$.
> We weten dat bij deze tactiek geldt:
>
> > $\forall n \in \mathbb{N}$ [Bij het spelen van a_{m-1} naar a_m in $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ houdt Speler I zich aan de strategie $\sigma_m \wedge a_{m-1} \sqsubseteq a_m$]
>
> Waarbij $a_{-1} = \langle\ \rangle$
> $\breve{\sigma}$ is een winnende strategie voor Speler I in het schaduwspel.
> Dus: $(\sigma_0, a_0, \sigma_1, a_1, \ldots) \notin D$
> Dus: $\exists m \in \mathbb{N}\, [\, a_m \in C_m\,]$
> Maar uit de constructie van de tactiek ziet men: $\forall m \in \mathbb{N}\, [a_m \notin C_m]$, want dat is de reden om van strategie te wisselen.
> Tegenspraak!

Zij α het element dat onstaat als Speler I zich houdt aan de beschreven tactiek. Zij m het aantal keer dat Speler I van tactiek heeft gewisseld.

Dan geldt: $\forall n \in \mathbb{N}\, [\, \bar{\alpha}2n \in C_m\,]$.
Hieruit volgt: $\alpha \in A_m \subseteq A$
Dus Speler I wint als hij de voorgeschreven tactiek volgt.
Dus $G_{\mathbb{N}}$ is gewonnen-voor-I.

(ii). *Speler II heeft een winnende strategie in het schaduwspel*
Zij $\breve{\tau}$ een winnende strategie voor het schaduwspel voor Speler II. We vormen een tactiek voor Speler II voor $G_{\mathbb{N}}(A)$
Bekijk:

$$B_0 = \{a \mid a \in \mathrm{Seq} \mid \exists \sigma \in Strat_I(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})\, [\, a = \breve{\tau}(\langle\, \sigma\, \rangle)\,]\}$$

Dit zijn alle mogelijke antwoorden die Speler II kan geven in het schaduwspel volgens strategie τ op een eerste zet van Speler I.
Merk op: voor alle $a \in B_0$ geldt lengte(a) is even.
Definieer:

$$U_0 = \{\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}\, [\, \bar{\alpha}2n \notin B_0\,]\}$$

Bewering $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\, [\, \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \backslash U_0 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}\, [\, \bar{\alpha}n \in B_0\,]\,]$

> $\Rightarrow$ Neem aan $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \backslash U_0$
> Dan geldt: $\neg \forall n \in \mathbb{N}\, [\, \bar{\alpha}2n \notin B_0\,]$
> Dan is er een n met $\bar{\alpha}2n \in B_0$
> Dus er is een m (namelijk $2n$) met $\bar{\alpha}m \in B_0$

$\Leftarrow$ Neem aan $\exists n \in \mathbb{N}\,[\,\bar{\alpha}n \in B_0\,]$
Dan is n even, zeg $n = 2k$
Dan geldt niet voor alle $n \in \mathbb{N}$: $\bar{\alpha}2n \notin B_0$
Dus $\alpha \notin U_0$
Dus $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \backslash U_0$

Hieruit volgt dat U_0 een gesloten deelverzameling van $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ is. Uit *Stelling 3* volgt dat $G_{\mathbb{N}}(U_0)$ vooruitbeslist is.

Bewering Speler II heeft een winnende strategie voor $G_{\mathbb{N}}(U_0)$

Aangezien $G_{\mathbb{N}}(U_0)$ vooruitbeslist is, is het voldoende te bewijzen dat Speler I geen winnende strategie heeft voor $G_{\mathbb{N}}(U_0)$.
Voor elke strategie $\sigma \in Strat_I(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ is er een $a \in B_0$ met $a = \breve{\tau}(\langle\, \sigma \,\rangle)$ (definitie B_0).
Verder is $\breve{\tau}$ een winnende strategie voor Speler II voor het schaduwspel. Dus a is gespeeld (door I) volgt σ.
Dus:

$$\forall \sigma \in Strat_I(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})\, \exists a \in \mathrm{Seq}\,[\,\mathrm{lengte}(a) \text{ is even} \wedge a \in B_0 \wedge a \text{ gespeeld volgens } \sigma\,]$$

Dan geldt:

$$\forall \sigma \in Strat_I(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})\, \exists \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\,[\,\alpha E_I \sigma \wedge \exists n \in \mathbb{N}\,[\,\bar{\alpha}2n \in B_0\,]\,]$$

Dus:

$$\forall \sigma \in Strat_I(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})\, \exists \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\,[\,\alpha E_I \sigma \wedge \alpha \notin U_0\,]$$

Dus Speler I heeft geen winnende strategie voor $G_{\mathbb{N}}(U_0)$.
Dus Speler II heeft een winnende strategie voor $G_{\mathbb{N}}(U_0)$.

Zij τ_0 een winnende strategie voor Speler II voor $G_{\mathbb{N}}(U_0)$.
Volg deze strategie totdat een positie a_0 wordt bereikt met $a_0 \in B_0$.

Bepaal $\sigma_0 \in Strat_I(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ met $a_0 = \breve{\tau}(\langle\, \sigma_0 \,\rangle)$.
Bekijk:

$$B_1 = \{a \mid a \in \mathrm{Seq} \mid \exists \sigma \in Strat_I(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) \text{met } a = \breve{\tau}(\langle\, \sigma_0, a_0, \sigma \,\rangle)\,]\}$$

Definieer:

$$U_1 = \{\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \bar{\alpha}n_0 = a_0 \;\Rightarrow\; \forall n \in \mathbb{N}\,[\,\bar{\alpha}n \notin B_1\,]\}$$

U_1 is een gesloten deelverzameling van $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

Want: bekijk $B_1' = \{a \in \mathrm{Seq} \mid a_0 \sqsubseteq a \wedge a \in B_1\}$
Dan geldt: $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus U_1 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}\, [\, \bar{\alpha}n \in B_1' \,]$.

Speler I heeft geen winnende strategie voor $G_{\mathbb{N}}(U_1)$

Want: $\forall \sigma \in Strat_I(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})\, \exists a \in \mathrm{Seq}\, [a \in B_1 \wedge$ bij het spelen van a_0 naar a houdt Speler I zich aan $\sigma]$

$G_{\mathbb{N}}(U_1)$ is vooruitbeslist (want U_1 is gesloten)
Dus: Speler II heeft een winnende strategie voor $G_{\mathbb{N}}(U_1)$.

Zij τ_1 een winnende strategie voor Speler II voor $G_{\mathbb{N}}(U_1)$.
Volg deze strategie totdat een positie a_1 wordt bereikt met $a_1 \in B_1$.

Bepaal $\sigma \in Strat_I(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ met $a_1 = \breve{\tau}(\langle\, \sigma_0, a_0, \sigma_1 \rangle\,)$.
...

Zij $\alpha = (\alpha(0), \alpha(1), \ldots)$ een element dat is ontstaan in een spel waarbij Speler II zich heeft gehouden aan bovenstaande tactiek. Er is tegelijkertijd een ronde $\sigma_0, a_0, \sigma_1, a_1, \ldots$ in het schaduwspel opgebouwd, zodat:

(a) Bij het spelen van $\sigma_0, a_0, \sigma_1, a_1, \ldots$ houdt Speler II zich aan $\breve{\tau}$.

(b) Tijdens het opbouwen van α worden de posities $a_0, a_1, \ldots$ gepasseerd.

$\breve{\tau}$ is een winnende strategie voor Speler II in het schaduwspel.
Dus:

$$\forall m \in \mathbb{N}\, [\, a_m \notin C_m \,]$$

Dus:

$$\forall m \in \mathbb{N}\, \exists n \in \mathbb{N}\, [\, \bar{\alpha}2n \notin C_m \,]$$

Dus:

$$\forall m \in \mathbb{N}\, [\, \alpha \notin A_m \,]$$

Dus:

$$\alpha \notin \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m = A$$

Dus de beschreven tactiek is een winnende strategie voor Speler II voor $G_{\mathbb{N}(A)}$.

Hieruit volgt dat de speler die een winnende strategie heeft voor het schaduwspel ook het spel $G_{\mathbb{N}}(A)$ kan winnen.
Het schaduwspel is vooruitbeslist. Dus ook $G_{\mathbb{N}}(A)$ is vooruitbeslist. $\square$

Het probleem van Mazur is ondertussen opgelost. Over de uitspraak: "Voor elke deelverzameling A van $N^{\mathbb{N}}$ is $G_{\mathbb{N}}$ vooruitbeslist", is men echter nog niet uitgepraat. Deze uitspraak staat bekend als het **vooruitbeslissingsaxioma**, wat wordt afkort als AD (Axiom of Determinacy). Met behulp van het keuzeaxioma kan men een deelverzameling A bepalen waarvoor $G_{\mathbb{N}}(A)$ niet vooruitbeslist is. Hieruit volgt dat AD strijdig is met het keuzeaxioma.
Uit AD en de axioma's van Zermelo en Fraenkel volgt echter wel het aftelbare keuzeaxioma. Ook kan men hieruit bewijzen dat alle deelzamelingen van de reële getallen Lebesgue meetbaar zijn.
Het vooruitbeslissingsaxioma is niet te bewijzen vanuit de axioma's van Zermelo en Fraenkel. Je kunt alleen proberen voor steeds grotere klassen te bewijzen dat $G_{\mathbb{N}}(A)$ vooruitbeslist is voor alle verzamelingen A in C. Het sterkste resultaat tot nu toe is het al eerder genoemde bewijs van Donald A. Martin dat het spel voor alle Borelverzamelingen vooruitbeslist is.