

Localització i conservació d'estructures en homotopia estable

Javier J. Gutiérrez Marín

Memòria presentada per optar al grau de
Doctor en Matemàtiques

Departament d'Àlgebra i Geometria
Universitat de Barcelona

Barcelona, maig de 2004

CERTIFICO que la present memòria ha estat realitzada per Javier J. Gutiérrez Marín sota la meva direcció.

Barcelona, maig de 2004

Dr. Carles Casacuberta i Vergés

Índex

Introducció	iii
1 Preliminars	1
1.1 Homotopia estable	1
1.2 La categoria homotòpica estable	4
1.3 Models per a la categoria homotòpica estable	12
1.4 Axiomàtica de la categoria homotòpica estable	15
2 Localització en categories de models simplicials	21
2.1 Categories de models simplicials	22
2.2 Objectes petits i categories localment presentables	27
2.3 Construcció de f -localitzacions	29
3 Functors de localització en homotopia estable	39
3.1 Espectres de funcions	39
3.2 Propietats dels functors de localització	43
3.3 Nul·lificacions	49
3.4 Localitzacions en conjunts de primers	53
4 Conservació d'estructures	57
4.1 Espectres anell i espectres mòdul	58
4.2 Localització d'espectres anell i espectres mòdul	61
4.3 Mòduls sobre espectres d'Eilenberg–Mac Lane	65
4.4 Localització de GEMs estables	71
5 Localització homològica d'espectres d'Eilenberg–Mac Lane	73
5.1 Localitzacions homològiques	74
5.2 Tipus d'aciclicitat i localització de mòduls	76

5.3	Alguns exemples	81
5.4	Functors de localització <i>smashing</i>	85
5.5	Localitzacions cohomològiques	87
6	Localització homotòpica d'espectres d'Eilenberg–Mac Lane	91
6.1	Espectres d'Eilenberg–Mac Lane f -locals	92
6.2	Alguns exemples. Localitzacions de $H\mathbb{Z}$	97
6.3	Espectres anell sòlids i rígids	102
6.4	Espectres d'Eilenberg–Mac Lane reduïts	105

Introducció

La localització és una tècnica ben coneguda en àlgebra commutativa i geometria algebraica. La construcció d'anells de fraccions i el procés associat de localització de mòduls permeten reduir l'estudi global de certes propietats referents a un cert anell a un estudi local que involucra anells més senzills. Moltes de les propietats formals de les localitzacions de mòduls són compartides per altres transformacions de naturalesa semblant definides en altres contextos. Aquest fet va conduir a una axiomatització del concepte de functor de localització en categories arbitràries, amb una terminologia similar a la de l'àlgebra, o amb altres noms [BW85], [GZ67], [Mac71].

La implementació de la localització en topologia algebraica va tenir les seves arrels en els treballs de Serre [Ser53] i Adams [Ada61], i es va començar a formalitzar gràcies a les contribucions de Sullivan [Sul70], [Sul74] i Quillen [Qui69], principalment. Les localitzacions de tipus d'homotopia han estat estudiades de manera particularment extensa en el cas de localització en primers [BK72a], [HMR75]. Les localitzacions homològiques generalitzen la localització en primers i van ser la via principal de transport a l'homotopia estable [Bou75], [Bou79a], [Bou79b], [Rav84], així com l'eina principal per al càlcul dels grups d'homotopia estables de les esferes durant molts anys [DHS88], [HS98], [Mah67], [Rav86].

En les dues últimes dècades ha anat augmentant cada vegada més l'ús de tècniques de l'àlgebra commutativa en homotopia estable (veure [GM95], [EKMM97]). La teoria d'homotopia estable es centra en l'estudi dels espectres i captura una part essencial de les propietats homotòpiques dels espais, prescindint dels fenòmens peculiars que es donen en dimensions concretes. La categoria d'homotopia estable és una categoria additiva triangulada, la qual cosa acosta molt el seu estudi al de les categories derivades d'anells.

Des de la dècada de 1960 s'han anat utilitzant els espectres d'Adams—

Boardman [Ada74], [Boa64] com a models per a l'homotopia estable, encara que els models de Bousfield–Friedlander [BF78] s'adapten millor al formalisme de la teoria de categories de models de Quillen. El producte *smash* d'espectres en la categoria d'Adams–Boardman és commutatiu i associatiu llevat d'homotopia, però no ho és en la categoria subjacent d'espectres. La construcció d'una categoria d'espectres amb un producte *smash* estrictament associatiu, commutatiu i amb unitat ha estat un dels problemes importants de la teoria d'homotopia estable, malgrat que durant alguns anys es va pensar que tal categoria no podia existir [Lew91]. La solució a aquest problema es va obtenir recentment amb l'aparició de dues noves categories de models per a l'homotopia estable: la categoria de S -mòduls [EKMM97] i la categoria d'espectres simètrics [HSS00]. Aquestes noves categories permeten traslladar fidelment diverses tècniques i construccions de l'àlgebra commutativa a la categoria estable, i treballar amb “espectres anell” i “espectres mòdul” de la mateixa manera que amb els seus anàlegs algebraics. Per exemple, la categoria derivada d'un anell R amb unitat és equivalent a la categoria homotòpica d'espectres mòdul sobre l'espectre anell HR de l'homologia ordinària amb coeficients en R .

Un dels resultats centrals d'aquesta memòria estableix que, sota hipòtesis apropiades, els functors de localització en la categoria homotòpica estable transformen espectres anell en espectres anell, i espectres mòdul sobre un anell en espectres mòdul sobre el mateix espectre anell (o fins i tot sobre el localitzat d'aquest espectre).

Aquests i altres resultats recents en teoria de localització tracten de la conservació d'estructures sota l'acció de les localitzacions. Donat un objecte X amb una determinada propietat o estructura i un functor de localització L , s'estudia si LX posseeix o no la mateixa propietat o estructura. Existeix una gran quantitat d'estructures que es conserven sota l'efecte de les localitzacions (veure [Bas03], [Cas94], [Cas00]). Per exemple, la classe dels espais que escindeixen com a productes d'espais d'Eilenberg–Mac Lane, també anomenats GEMs, es conserva quan apliquem un functor de localització, i el mateix succeeix amb els H -espais o els espais de llaços.

Algunes d'aquestes estructures que es conserven sota localitzacions poden es poden incloure dintre del marc més general d'àlgebres sobre opèrades. Les opèrades són objectes que codifiquen estructures algebraiques. Van ser utilitzades a principis dels 70 com a eines en teoria d'homotopia per a l'estudi dels

espais de llaços iterats [BV73], [May72]. L'estudi de les opèrades en categories monoidals simètriques ha permès importants aplicacions en àlgebra, topologia i física [BM03], [GNPR04], [Laa03], [Man01], [Mar96], [MSS02].

Localització homotòpica

La localització respecte a una aplicació contínua f va ser desenvolupada per Bousfield [Bou94], [Bou97] i Farjoun [Far96] principalment. Es tracta d'una construcció universal en la categoria homotòpica dels espais (CW-complexos o conjunts simplicials) que converteix a f en una equivalència homotòpica. Els functors de f -localització inclouen com a casos particulars transformacions idempotents ja conegudes, com les localitzacions homològiques, la construcció *plus* de Quillen, les seccions de Postnikov, o les localitzacions en conjunts de primers. La teoria de f -localització va tenir importants repercussions en l'estudi de torres cromàtiques inestables, teoria K i classes de Bousfield, entre d'altres conceptes.

En [Bou96], Bousfield aplica el llenguatge de localització respecte a una aplicació a l'homotopia estable, en un intent de relacionar la periodicitat estable amb la inestable. Com a conseqüència, apareixen noves transformacions idempotents, que generalitzen les localitzacions homològiques estables i altres construccions clàssiques en la categoria dels espectres com les seccions de Postnikov o les localitzacions en conjunts de primers.

En la seva forma més general, la noció de localització homotòpica respecte a un morfisme f pot definir-se en qualsevol categoria de models $\mathcal{C}$ que sigui simplicial. Els exemples de categories de models simplicials inclouen l'homotopia inestable (conjunts simplicials) i l'homotopia estable (espectres simètrics [HSS00]). No obstant això, per a poder assegurar l'existència d'aquests functors de f -localització per a qualsevol morfisme f és necessari suposar algunes hipòtesis addicionals sobre la categoria $\mathcal{C}$.

La construcció del functor de f -localització utilitza de manera crucial el *small object argument* de Quillen [Hir03, 10.5], que permet realitzar factoritzacions functorials en categories de models. Les idees per a aquesta construcció de f -localitzacions en categories de models simplicials apareixen ja en [Bou77]. En [Far96], Farjoun construeix la f -localització en les categories de CW-complexos i conjunts simplicials. Més recentment, la completa monografia

de Hirschhorn [Hir03] demostra l'existència de f -localitzacions en una classe més àmplia de categories (categories cel·lulars), que inclouen les categories d'espais topològics Hausdorff compactament generats i conjunts simplicials, ambdues amb i sense punt base, i la categoria d'espectres simètrics.

Anells i mòduls en homotopia estable

La categoria homotòpica estable és una categoria monoidal simètrica, amb un producte *smash* associatiu i commutatiu llevat d'homotopia. Un espectre anell en sentit clàssic és un objecte monode en la categoria homotòpica estable. Així, un espectre anell E és un espectre dotat de dues aplicacions $\mu: E \wedge E \longrightarrow E$ i $\eta: S \longrightarrow E$, on S és l'espectre de les esferes, que juga el paper de la unitat de la categoria monoidal. Aquestes dues aplicacions es diuen producte i unitat de E respectivament i verifiquen condicions d'associativitat i unitat donades per la commutativitat llevat d'homotopia dels següents diagrames:

$$\begin{array}{ccc} E \wedge E \wedge E & \xrightarrow{1 \wedge \mu} & E \wedge E \\ \mu \wedge 1 \downarrow & & \downarrow \mu \\ E \wedge E & \xrightarrow{\mu} & E \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} S \wedge E & \xrightarrow{\eta \wedge 1} & E \wedge E & \xleftarrow{1 \wedge \eta} & E \wedge S \\ & \searrow & \downarrow \mu & \swarrow & \\ & & E & & \end{array}$$

Els espectres mòdul sobre un espectre anell es defineixen anàlogament com els mòduls sobre monoides en la categoria homotòpica estable. D'aquesta manera, si E és un espectre anell, un espectre mòdul sobre E o un E -mòdul és un espectre M juntament amb una aplicació $m: E \wedge M \longrightarrow M$ tal que els següents diagrames commuten llevat d'homotopia:

$$\begin{array}{ccc} E \wedge E \wedge M & \xrightarrow{1 \wedge m} & E \wedge M \\ \mu \wedge 1 \downarrow & & \downarrow m \\ E \wedge M & \xrightarrow{m} & M \end{array} \quad \begin{array}{ccc} S \wedge M & \xrightarrow{\eta \wedge 1} & E \wedge M \\ & \searrow & \downarrow m \\ & & M. \end{array}$$

La categoria dels E -mòduls homotòpics, $E\text{-}hmod$, es defineix com la categoria d'Eilenberg–Moore associada a la mònada $(E \wedge -, \eta \wedge 1, \mu \wedge 1)$ en la categoria homotòpica estable.

Les primeres categories de models per a l'homotopia estable dotades d'un producte *smash* estrictament associatiu i commutatiu van ser la categoria dels

S -mòduls [EKMM97] i la categoria dels espectres simètrics [HSS00]. Aquestes dues categories permeten definir estructures d'espectres anell i espectres mòdul tant en la pròpia categoria de models (estructures “estRICTES”) com en la categoria d'homotopia (estructures “homotòPIQUES”). Les estructures d'espectre anell estRICTE i espectre mòdul estRICTE es defineixen igual que les seves anàlogues homotòPIQUES, amb l'excepció que els diagrames commutïn estRICTAMENT, no només llevat d'homotopia. Si prenem com a model la categoria dels espectres simètrics Sp^{Σ} , donat un espectre anell E , la categoria dels E -mòduls estRICTES, $E\text{-mod}$, és la categoria d'Eilenberg–Moore associada a la mònada $(E \wedge -, \eta \wedge 1, \mu \wedge 1)$ en Sp^{Σ} .

En aquesta memòria s'estudia l'efecte dels functors de f -localització sobre les estructures d'espectre anell i espectre mòdul homotòPIQUES, i es demostra que aquestes estructures es conserven per a una àmplia classe de functors sota certes hipòtesis de connectivitat. Com a conseqüència, s'obtenen resultats sobre conservació d'estructures de GEMs estables, anàlegs als que s'obtenen en el cas inestable [Far96]. Els GEMs estables estan caracteritzats per ser exactament els mòduls homotòPIQUES sobre l'espectre $H\mathbb{Z}$ de la teoria d'homologia ordinària. També s'analitza la relació que existeix entre la categoria dels E -mòduls homotòPIQUES $E\text{-hmod}$ i la categoria homotòPICA dels E -mòduls estRICTES $Ho(E\text{-mod})$. En alguns casos, per exemple si $E = H\mathbb{Z}$, aquestes dues categories són equivalents.

Diversos exemples mostren que les localitzacions no només conserven les estructures homotòPIQUES d'anell, sinó també les estRICTES. Per a l'estudi de la conservació d'anells estRICTES és necessari analitzar el cas més general de conservació d'estructures d'àlgebres sobre opèrades. En una categoria de models monoidal i simètrica en la qual tingui sentit la definició d'opèrades, els monoides estan caracteritzats per ser les àlgebres sobre una opèrada Ass . La categoria de les opèrades pot dotar-se d'una estructura de categoria de models en molts casos [BM03], per exemple quan treballem amb opèrades de conjunts simplicials. Així, si definim com a A_{∞} l'opèrada obtinguda prenent una resolució cofibrant de l'opèrada Ass en la categoria de conjunts simplicials, els A_{∞} -espais són els espais de llaços, i en la categoria d'espectres simètrics (que està enriquida en conjunts simplicials) els A_{∞} -espectres són els espectres anell estRICTES, també anomenats espectres anell A_{∞} . Veurem que els functors de localització conserven estructures d'àlgebres sobre opèrades cofibrants sota certes condicions, la qual cosa té com a conseqüència la conservació d'espectres

anell estrictes.

Contingut del treball i resultats principals

El primer capítol de la memòria serveix d'introducció a la teoria d'homotopia estable. En ell es descriu l'evolució de l'homotopia estable i les seves propietats des d'el model de Spanier–Whitehead de 1953 [SW53], passant per la categoria clàssica d'Adams–Boardman [Ada74], [Boa64], fins als models més actuals com són la categoria dels S -mòduls [EKMM97], la categoria dels espectres simètrics [HSS00], o el tractament axiomàtic de [HPS97].

Recordarem els conceptes més importants de la categoria homotòpica estable d'Adams–Boardman [Ada74], que farem servir en la major part d'aquesta memòria. Ens centrarem sobretot en els seus elements bàsics: la noció d'espectre, el producte *smash* i les teories d'homologia i cohomologia.

La categoria dels S -mòduls i la dels espectres simètrics són categories de models per a l'homotopia estable amb un producte *smash* associatiu, commutatiu i unitari en sentit estricte. La categoria dels espectres simètrics, de la qual també recordarem breument les definicions més importants, serà la que utilitzarem quan necessitem treballar específicament en una categoria de models.

Les propietats bàsiques de la categoria d'homotopia estable són compartides per altres categories, sobretot algebraiques. Recordarem aquestes propietats comunes, que es descriuen en [Mar83] i de forma axiomàtica en [HPS97], i que inclouen entre d'altres les de categoria triangulada o categoria monoidal simètrica. Aquests conceptes s'utilitzaran en posteriors capítols de la memòria.

El segon capítol es dedica a estudiar els functors de f -localització en categories de models simplicials. Es recorden les definicions de categoria de models de Quillen [Qui67], [Hov99], categoria simplicial i altres conceptes com categoria de models pròpia o categoria localment presentable.

L'existència de functors de f -localització per a qualsevol aplicació f està garantida quan la categoria de models en la qual treballem té bones propietats. Aquestes propietats inclouen les de ser una categoria simplicial, cofibrantment generada, pròpia per l'esquerra i localment presentable. La construcció d'aquests functors es basa en el *small object argument* de Quillen [Hir03, 10.5] i les idees d'aquesta construcció ja apareixen en un article de Bousfield [Bou77],

encara que de fet es remunten al treball de Gabriel–Zisman [GZ67].

En la memòria es desenvolupa amb detall aquesta construcció per a les categories que satisfan les condicions anteriors. Aquestes categories inclouen, per exemple, la categoria de conjunts simplicials, i en el cas de l'homotopia estable, la categoria d'espectres simètrics. D'aquesta manera, es construeix un functor de f -localització $L_f: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ que inverteix de manera universal l'aplicació f . Aquest functor és idempotent en la categoria homotòpica i conserva equivalències dèbils.

El functor L_f permet dotar a la categoria $\mathcal{C}$ d'una nova estructura de categoria de models $L_f\mathcal{C}$, en la qual les equivalències dèbils són les f -equivalències, és a dir, les aplicacions g tals que L_fg és una equivalència dèbil, i les cofibracions de $L_f\mathcal{C}$ són les mateixes que les de l'estructura de models original de $\mathcal{C}$. D'aquesta manera, una f -localització d'un objecte en $\mathcal{C}$ és exactament una aproximació fibrant a aquest objecte en la categoria de models localitzada.

En el Capítol 3 es consideren functors de f -localització en la categoria homotòpica estable. Prenent com a categoria de models la dels espectres simètrics, sabem que existeix qualsevol functor de f -localització en aquesta categoria, el qual al mateix temps dóna lloc a un functor de f -localització al passar a la categoria homotòpica. Seguint [Bou96], els conceptes d'espectre f -local i f -equivalència es defineixen utilitzant el recubridor connectiu $F^c(-, -)$ de l'espectre de funcions $F(-, -)$, ja que els seus grups d'homotopia coincideixen amb els del conjunt simplicial $\text{Map}(-, -)$ de la categoria d'espectres simètrics. El fet d'utilitzar el recubridor connectiu $F^c(-, -)$ juga un paper clau en l'estudi de la interacció de les f -localitzacions estables amb el functor suspensió.

Donada una aplicació d'espectres f -locals, la seva fibra homotòpica també és f -local. D'aquí es dedueix que la classe dels espectres f -locals està tancada per desuspensions i la classe de les f -equivalències està tancada per suspensions. Aquest fet posa de manifest la importància de l'estudi de la relació entre la f -localització i la suspensió. Per a cada espectre X hi ha una aplicació natural

$$\Sigma L_f X \longrightarrow L_f \Sigma X.$$

Direm que L_f commuta amb la suspensió o que és un functor exacte (o triangulat en el sentit de [Nee01]) si aquesta aplicació és una equivalència homotòpica per a tot X . Aquesta classe de functors tenen bones propietats de

clausura d'espectres f -locals i f -equivalències per suspensions i desuspensions arbitràries i de conservació de cofibracions. Demostrarem el següent teorema que caracteritza aquests functors:

Teorema. *Sigui $f: A \longrightarrow B$ una aplicació d'espectres. Són equivalents:*

- i) $\Sigma L_f X \simeq L_f \Sigma X$ per a tot espectre X .
- ii) $\Sigma^k L_f X \simeq L_f \Sigma^k X$ per a tot espectre X i tot $k \in \mathbb{Z}$.
- iii) Si E és un espectre f -local, llavors $\Sigma^k E$ és f -local per a tot $k \in \mathbb{Z}$.
- iv) Si g és una f -equivalència, llavors $\Sigma^k g$ és una f -equivalència per a tot $k \in \mathbb{Z}$.
- v) $L_f X \simeq L_{\Sigma^k f} X$ per a tot espectre X i per a tot $k \in \mathbb{Z}$.
- vi) L'aplicació $F(B, I) \longrightarrow F(A, I)$ induïda per f és una equivalència homotòpica per a tot espectre E que sigui f -local.
- vii) Si E és f -local, llavors $F(X, E)$ és f -local per a tot espectre X .
- viii) Si $g: X \longrightarrow Y$ i $h: M \longrightarrow N$ són f -equivalències arbitràries, llavors $g \wedge h: X \wedge M \longrightarrow Y \wedge N$ és una f -equivalència.
- ix) Si $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ és una cofibració d'espectres, llavors $L_f X \longrightarrow L_f Y \longrightarrow L_f Z$ també és una cofibració.

Hi ha una altra classe de functors importants que gairebé commuten amb la suspensió, i que definim com functors de localització quasi-exactes. Són aquells que tenen la propietat que, donada una cofibració d'espectres $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ en la qual X i Z són f -locals, llavors Y també ho és. Aquests functors gairebé conserven cofibracions; de fet, demostrarem que si el functor de localització és quasi-exacte, llavors conserva totes les cofibracions tals que la seva cofibra és f -local.

El primer exemple que apareix de functors que no commuten amb la suspensió són les seccions de Postnikov. Les seccions de Postnikov són un cas particular de functors de nul·lificació, que són f -localitzacions en les quals l'aplicació f és de la forma $f: A \longrightarrow *$ per a algun espectre A . El functor de nul·lificació respecte a A es denotarà P_A . Quan $A = \Sigma^{k+1} S$, el functor de

nul·lificació que s'obté és la k -èsima secció de Postnikov. Les nul·lificacions són exemples de functors de localització quasi-exactes.

La relació entre els functors de f -localització i les nul·lificacions és molt estreta. Si C és la cofibra de l'aplicació f , sempre tenim una transformació natural de functors

$$P_C \longrightarrow L_f.$$

Demostrem que quan el functor L_f commuta amb la suspensió, aquesta transformació natural és una equivalència. De fet, L_f commuta amb la suspensió si i només si P_C commuta amb la suspensió.

La localització d'espectres en conjunts de primers es defineix anàlogament a la localització en primers d'espais i grups. Si P és un conjunt de primers i X és un espectre, la P -localització de X és l'aplicació

$$1 \wedge \eta: X \simeq X \wedge S \longrightarrow X \wedge M\mathbb{Z}_P,$$

on $M\mathbb{Z}_P$ és un espectre de Moore per a l'anell dels enters P -localitzats i η és l'aplicació induïda per la unitat en $\mathbb{Z}_P$. La localització en primers és un cas particular de f -localització. Els espectres P -locals són precisament aquells tals que els seus grups d'homotopia són $\mathbb{Z}_P$ -mòduls.

En el Capítol 4 es descriu com afecta a les estructures d'espectre anell i espectre mòdul l'acció d'un functor de localització en la categoria homotòpica estable. Demostrem que, quan el functor de localització commuta amb la suspensió, conserva les estructures d'espectre anell i espectre mòdul.

Teorema. *Si un functor de localització L_f commuta amb la suspensió, llavors es compleix el següent:*

- i) *Si E és un espectre anell, llavors l'espectre $L_f E$ adquireix una única estructura d'espectre anell tal que l'aplicació de localització $l_E: E \rightarrow L_f E$ és una aplicació d'anells. Si a més a més E és commutatiu, llavors també ho és $L_f E$.*
- ii) *Si M és un espectre E -mòdul, llavors l'espectre $L_f M$ adquireix una única estructura de E -mòdul tal que $l_M: M \rightarrow L_f M$ és una aplicació de E -mòduls. A més a més $L_f M$ admet una única estructura de $L_f E$ -mòdul que estén l'estructura de E -mòdul.*

Els functors de localització que no commuten amb la suspensió no conserven en general aquestes estructures. Un contraexemple ens el proporciona l'espectre $K(n)$ de les teories K de Morava. L'espectre $K(n)$ és un espectre anell i no obstant això la seva secció de Postnikov en el nivell zero $K(n)_{(0)}$ no admet cap estructura d'espectre anell. Considerant $K(n)$ com un mòdul sobre si mateix es demostra també que $K(n)_{(0)}$ no pot tenir estructura de $K(n)$ -mòdul.

Aquesta falta de conservació d'estructures dels functors de localització que no commuten amb la suspensió pot solucionar-se si afegim algunes condicions de connectivitat.

Teorema. *Si L_f és un functor de localització qualsevol, llavors es compleix el següent:*

- i) *Si E és un espectre anell connectiu i $L_f E$ és connectiu, llavors l'espectre $L_f E$ adquireix una única estructura d'espectre anell tal que l'aplicació de localització $l_E: E \longrightarrow L_f E$ és una aplicació d'anells. Si a més a més E és commutatiu, llavors també ho és l'espectre $L_f E$.*
- ii) *Si M és un espectre E -mòdul, on E és un espectre anell connectiu, llavors l'espectre $L_f M$ adquireix una única estructura de E -mòdul tal que l'aplicació de localització $l_M: M \longrightarrow L_f M$ és una aplicació de E -mòduls. A més a més si $L_f E$ també és connectiu, $L_f M$ admet una única estructura de $L_f E$ -mòdul que estén l'estructura de E -mòdul.*

Com a conseqüència d'aquest teorema es pot derivar la conservació d'altres estructures, com els GEMs estables. Els GEMs estables es defineixen com els espectres E tals que

$$E \simeq \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} \Sigma^k H A_k.$$

Quan els A_k són tots R -mòduls, es diu que E és un R -GEM estable. Aquesta propietat d'escisió dels R -GEMs estables ens permet caracteritzar-los precisament com els espectres mòdul sobre l'espectre anell HR . D'aquesta manera, el teorema anterior juntament amb el fet que HR és un espectre connectiu ens permet provar el següent:

Teorema. *Sigui R un anell amb unitat i f una aplicació qualsevol. Si E és un R -GEM estable, llavors $L_f E$ també és un R -GEM estable i l'aplicació de localització $l_E: E \longrightarrow L_f E$ és una aplicació de HR -mòduls.*

En el cas més senzill en que el GEM estable estigui format per un únic espectre d'Eilenberg–Mac Lane, demostrem un resultat anàleg al del cas inestable [Bou82], [Far96] sobre els grups d'homotopia de la seva localització.

Teorema. *Sigui G un grup abelià i sigui $k \in \mathbb{Z}$. Llavors tenim una equivalència*

$$L_f \Sigma^k H G \simeq \Sigma^k H G_1 \vee \Sigma^{k+1} H G_2$$

com a $H\mathbb{Z}$ -mòduls, per a certs grups abelians G_1 i G_2 . Si G és un R -mòdul, llavors G_1 i G_2 també ho són.

Així, la localització d'un GEM estable pot ser obtinguda a partir de les localitzacions dels espectres d'Eilenberg–Mac Lane que el formen, és a dir, si $E \simeq \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} \Sigma^k H A_k$, llavors $L_f E \simeq \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} L_f \Sigma^k H A_k$.

Els dos capítols següents tracten sobre la localització d'espectres d'Eilenberg–Mac Lane. En el capítol 5 ens centrarem en el cas particular de les localitzacions homològiques. Aquestes localitzacions van ser iniciades per Adams en [Ada73] per a espais topològics. Bousfield va desenvolupar posteriorment aquesta teoria i va demostrar la seva existència per a espais [Bou75] i espectres [Bou79a].

Els functors de localització homològica són casos particulars de functors de f -localització que inverteixen de manera universal les equivalències respecte a una teoria d'homologia donada. Donat un espectre E , es denota per L_E el functor de localització homològica respecte a E . En [Bou79a] s'estudien les localitzacions $L_E X$ quan els espectres E i X són ambdós connectius. El mateix problema per al cas d'espais d'Eilenberg–Mac Lane va ser tractat per Bousfield en [Bou82]. En aquest capítol, nosaltres estudiem la localització homològica $L_E H G$ per a qualsevol grup abelià G i qualsevol espectre E , no només els connectius, i veurem que aquesta localització vindrà determinada pel fet que els espectres $H\mathbb{Z}/p$ i $H\mathbb{Q}$ siguin o no acíclics respecte a E . Com tot functor de localització homològica commuta amb la suspensió, podem estendre els nostres resultats a localitzacions homològiques de HR -mòduls.

Presentarem alguns càlculs explícits de localitzacions respecte a teories d'homologia concretes. Demostrarem, per exemple, que la localització res-

pecte a teoria K o respecte a l'espectre de Johnson–Wilson $E(n)$ de qualsevol HR -mòdul és la racionalització. En el cas de localitzacions d'espectres d'Eilenberg–Mac Lane, determinem exactament totes les possibles localitzacions homològiques per a diferents grups abelians. Aquestes localitzacions es determinen a partir de les condicions d'aciclicitat dels espectres $H\mathbb{Q}$ i $H\mathbb{Z}/p$ respecte a E i del conjunt de primers per als quals el grup abelià G no és únicament p -divisible.

Teorema. *Siguin $A_p = \text{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, G)$, $B_p = \text{Hom}(\mathbb{Z}/p^\infty, G)$ i sigui P el conjunt de primers tals que $H\mathbb{Z}/p$ no és E -acíclic i G no és únicament p -divisible per a tot $p \in P$. Donat un espectre qualsevol E i un grup abelià G tenim el següent:*

- i) *Si $H\mathbb{Q}$ és E -acíclic, llavors $L_E HG \simeq \prod_{p \in P} (HA_p \vee \Sigma HB_p)$.*
- ii) *Si $H\mathbb{Q}$ no és E -acíclic, tenim una cofibració d'espectres*

$$L_E HG \rightarrow H(G \otimes \mathbb{Q}) \vee \prod_{p \in P} (HA_p \vee \Sigma HB_p) \rightarrow M\mathbb{Q} \wedge \prod_{p \in P} (HA_p \vee \Sigma HB_p).$$

La taula següent mostra els càlculs obtinguts de totes les possibles localitzacions homològiques d'espectres d'Eilenberg–Mac Lane per a diferents grups abelians, depenent de les condicions de E -aciclicitat dels espectres $H\mathbb{Q}$ i $H\mathbb{Z}/p$. Les columnes corresponen començant per l'esquerra als casos $E\mathbb{Q} = 0$ i $E \wedge H\mathbb{Z}/p = 0$ per a tot p ; $E\mathbb{Q} \neq 0$ i $E \wedge H\mathbb{Z}/p = 0$ per a tot p ; $E\mathbb{Q} = 0$ i $E \wedge H\mathbb{Z}/p \neq 0$ per a tot $p \in P$; i $E\mathbb{Q} \neq 0$ i $E \wedge H\mathbb{Z}/p \neq 0$ per a tot $p \in P$.

$L_E H\mathbb{Z}$	0	$H\mathbb{Q}$	$\prod_{p \in P} H\widehat{\mathbb{Z}}_p$	$H\mathbb{Z}_P$
$L_E H\mathbb{Z}/p^k$	0	0	$H\mathbb{Z}/p^k$	$H\mathbb{Z}/p^k$
$L_E H\mathbb{Q}$	0	$H\mathbb{Q}$	0	$H\mathbb{Q}$
$L_E H\mathbb{Z}_R$	0	$H\mathbb{Q}$	$\prod_{p \in P \cap R} H\widehat{\mathbb{Z}}_p$	$H\mathbb{Z}_{P \cap R}$
$L_E H\mathbb{Z}/p^\infty$	0	0	$\Sigma H\widehat{\mathbb{Z}}_p$	$H\mathbb{Z}/p^\infty$
$L_E H\widehat{\mathbb{Z}}_p$	0	$H\widehat{\mathbb{Q}}_p$	$H\widehat{\mathbb{Z}}_p$	$H\widehat{\mathbb{Z}}_p$

En tots aquests exemples, l'únic que té un grup d'homotopia en dimensió 1 es $L_E H\mathbb{Z}/p^\infty$. El grup $\mathbb{Z}/p^\infty$ té la propietat de ser un grup abelià divisible. Per

a grups abelians reduïts, provarem el resultat següent, que demostrarem també en el capítol següent de forma més general per a un functor de f -localització qualsevol.

Teorema. *Si G és un grup abelià reduït i E és un espectre qualsevol, llavors $L_E HG \simeq HA$ per a algun grup abelià A .*

Utilitzant aquest teorema i la descomposició de qualsevol grup abelià com una suma directa d'un grup divisible i altre reduït, deduïm que si en un grup abelià G no apareix $\mathbb{Z}/p^\infty$ com a sumand directe per a cap primer p , o bé $L_E H\mathbb{Z}/p^\infty = 0$ o $H\mathbb{Z}/p^\infty$, llavors $L_E HG$ té un sol grup d'homotopia en dimensió 0.

L'última part d'aquest capítol es dedica a un cas especial de localitzacions homològiques, els functors de localització *smashing*. Aquests functors estan caracteritzats pel fet que la localització de qualsevol espectre s'obté fent el producte *smash* amb la localització de l'espectre de les esferes, és a dir, $LX \simeq X \wedge LS$ per a tot espectre X . Tots els functors de localització *smashing* són localitzacions homològiques $L = L_E$, on $E = LS$. També es diu que un espectre E és *smashing* quan L_E és *smashing* [Rav84]. Els espectres K i $E(n)$ són *smashing* per a tot n [DHS88]. Per a aquesta classe de functors demostrarem que l'homologia de LS està concentrada en dimensió zero. Això contrasta amb el fet que l'homotopia de LS pot ser no acotada; per exemple, $L_K S$ té infinits grups d'homotopia no nuls en dimensions positives i negatives [Rav84].

Teorema. *Si L és un functor de localització smashing, llavors es compleix que $(H\mathbb{Z})_k(LS)$ és 0 si $k \neq 0$ i és un subanell dels racionals si $k = 0$.*

Quan $(H\mathbb{Z})_0(LS)$ és exactament $\mathbb{Q}$, veurem que el functor L és la racionalització, o bé LS té infinits grups d'homotopia no nuls en dimensions negatives. Aquest fet proporciona una nova demostració de que $L_K S$ i $L_{E(n)} S$ no estan acotats inferiorment.

En el Capítol 6 es desenvolupa el cas general de f -localitzacions d'espectres d'Eilenberg–Mac Lane. El cas inestable ha estat tractat amb anterioritat en [Far96] i [CRT00]. Els nostres resultats estenen alguns dels resultats apareguts en aquests treballs a la categoria homotòpica estable. Hem demostrat anteriorment que la localització d'una suspensió d'un espectre d'Eilenberg–Mac Lane, $\Sigma^k HG$, té com a màxim dos grups d'homotopia no trivials en dimensions k i

$k + 1$. Provarem que aquests dos grups d'homotopia satisfan certes condicions en relació amb el grup G . En concret, si $A = \pi_k(L_f HG)$ i $B = \pi_{k+1}(L_f HG)$, llavors

$$\mathrm{Hom}(A, A) \cong \mathrm{Hom}(G, A) \quad \text{i} \quad \mathrm{Hom}(A, B) \cong \mathrm{Hom}(G, B).$$

En alguns casos concrets, per exemple quan G és un grup abelià lliure o G és $\mathbb{Z}/p^k$, veurem que el segon d'aquests grups d'homotopia és nul. Estudiarem les f -localitzacions de l'espectre HG quan G és un grup abelià finitament generat i, en particular, quines són totes les possibles localitzacions de l'espectre $H\mathbb{Z}$.

Teorema. *La localització de l'espectre $\Sigma^k H\mathbb{Z}$ té com a màxim un grup d'homotopia no trivial, és a dir, $L\Sigma^k H\mathbb{Z} \simeq \Sigma^k HA$. Si $A \neq 0$, llavors A compleix que l'aplicació $\mathrm{Hom}(A, A) \longrightarrow A$ definida per $\varphi \mapsto \varphi(1_A)$ és un isomorfisme de grups.*

Els grups abelians A amb la propietat anterior adquireixen estructura d'anell i es diuen *anells rígids*. La terminologia d'anells rígids va ser utilitzada per primera vegada en [CRT00] per a descriure les f -localitzacions de l'esfera S^1 . No obstant això, aquest tipus d'anells ja havia estat estudiat anteriorment amb el nom de E -anells en altres contextos [Sch73]. Els anells rígids inclouen, entre d'altres, els subanells de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}/n$, els enters p -àdics i tots els anells sòlids en el sentit de Bousfield–Kan [BK72b]. Encara que existeixen anells rígids de cardinalitat arbitràriament gran [DMV87], hi ha grups com $\mathbb{Z}/p^\infty$ o $\widehat{\mathbb{Q}}_p$ que no admeten una estructura d'anell rígid. Per tant, no existeix cap functor de localització tal que $\pi_k(L\Sigma^k H\mathbb{Z})$ sigui $\mathbb{Z}/p^\infty$ o $\widehat{\mathbb{Q}}_p$. Per a cada anell rígid A , l'aplicació $f: S \longrightarrow MA$, induïda per la unitat de A , dona lloc a un functor de f -localització tal que $L_f H\mathbb{Z} \simeq HA$. Això ens permet demostrar el següent resultat:

Teorema. *Hi ha una classe pròpia de functors de f -localització no equivalents en la categoria homotòpica estable.*

Aquest fet contrasta amb l'existència de només un conjunt de classes de Bousfield [DP01] i per tant només un conjunt de localitzacions homològiques no equivalents.

L'altre resultat important d'aquest capítol és la generalització del teorema sobre localitzacions homològiques d'espectres d'Eilenberg–Mac Lane amb grup d'homotopia reduït que vam veure en el Capítol 5. Aquí demostrarem aquest teorema per a functors de f -localització en general.

Teorema. *Si G és un grup abelià reduït i f és una aplicació qualsevol, llavors $L_f \Sigma^k HG \simeq \Sigma^k HA$, per a algun grup abelià A i per a tot $k \in \mathbb{Z}$.*

Com a conseqüència, si $\mathbb{Z}/p^\infty$ no apareix com a sumand directe d'un grup abelià G per a tot primer p , la seva localització $L_f \Sigma^k HG$ té com a màxim un grup d'homotopia no trivial en dimensió k per a qualsevol functor de localització L_f .

En el Capítol 7 estudiem la relació que existeix entre les categories d'espectres mòdul homotòpics i les categories d'espectres mòdul estrictes. En el Capítol 3 hem treballat amb anells i mòduls homotòpics, que són els monoides i els mòduls sobre monoides respectivament en la categoria homotòpica estable. Els anells i mòduls estrictes es defineixen d'igual manera, però en la categoria de models. Per a això necessitem una categoria de models per a l'homotopia estable que tingui un producte *smash* estrictament associatiu i commutatiu, com la categoria dels espectres simètrics [HSS00]. Una vegada definits els mòduls homotòpics i els estrictes sobre un espectre anell E , es considera en cada cas la categoria d'Eilenberg–Moore associada a la mònada definida pel functor $X \mapsto E \wedge X$. Quan considerem aquesta mònada en la categoria homotòpica estable, la seva categoria d'Eilenberg–Moore associada és la categoria dels E -mòduls homotòpics, $E\text{-}hmod$. Quan la considerem en la categoria d'espectres simètrics, la categoria d'Eilenberg–Moore associada és la categoria de E -mòduls estrictes, $E\text{-}mod$, que té també estructura de categoria de models.

Les categories de mòduls estrictes tenen millors propietats que les de mòduls homotòpics. Per exemple, la fibra d'una aplicació de mòduls estrictes torna a ser un mòdul estrictes, mentre que aquest resultat és fals en el cas de mòduls homotòpics [May98]. Estudiarem la relació entre la categoria dels E -mòduls homotòpics i la categoria homotòpica dels E -mòduls estrictes en el cas $E = HR$ per a un anell R amb unitat. La categoria $HR\text{-}mod$ és equivalent en el sentit de Quillen a la categoria de complexos de cadenes no acotats de R -mòduls [Rob87], [SS03]. Les categories $HR\text{-}hmod$ i $Ho(HR\text{-}mod)$ no són equivalents en general, encara que en alguns casos, per exemple quan $R = \mathbb{Z}$, si que existeix una equivalència entre aquestes categories. Veurem com aquesta equivalència depèn de la dimensió global de l'anell R .

Teorema. *Si R és un cos o un subanell de $\mathbb{Q}$, llavors hi ha una equivalència de categories entre $Ho(HR\text{-}mod)$ i $HR\text{-}hmod$.*

Aquesta equivalència de categories, juntament amb els resultats del Capítol 4 sobre localització de mòduls homotòpics, ens permet obtenir resultats sobre conservació de mòduls estrictes en aquests casos concrets.

Teorema. *Si M és un HR -mòdul estricte i R és un cos o un subanell de $\mathbb{Q}$, llavors $L_f M$ és equivalent a un HR -mòdul estricte, per a qualsevol aplicació f .*

Finalment, en el Capítol 8 tractem sobre la conservació per functors de localització d'estructures definides com a àlgebres sobre opèrades en una categoria de models simplicial i monoidal simètrica. Aquestes estructures inclouen els espectres anell estrictes i els espais de llaços, entre d'altres. Recordarem les definicions d'opèrades i àlgebres sobre opèrades en categories monoidals i alguns exemples. Veurem com dotar d'una estructura de categoria de models a la categoria de les opèrades, tal com es descriu en [BM03], i com definir àlgebres sobre opèrades simplicials en la categoria d'espectres simètrics o en qualsevol categoria enriquida en conjunts simplicials.

En una categoria de models monoidal en la qual tingui sentit la definició d'opèrades, els monoides estan caracteritzats per ser les àlgebres sobre una opèrada Ass . L'opèrada A_∞ es defineix a partir d'una resolució cofibrant de l'opèrada Ass en la categoria d'opèrades de conjunts simplicials. Les àlgebres sobre aquesta opèrada A_∞ són precisament els espais de llaços. En la categoria d'espectres simètrics (que està enriquida en conjunts simplicials) les àlgebres sobre A_∞ són els espectres anell estrictes, també anomenats espectres anell A_∞ . El principal resultat d'aquest capítol és el següent teorema de conservació d'àlgebres sobre opèrades cofibrants.

Teorema. *Sigui $\mathcal{O}$ una opèrada cofibrant en conjunts simplicials i sigui $\mathcal{S}$ una categoria de models simplicial i monoidal. Sigui L un functor de localització homotòpica en $\mathcal{S}$. Suposem que X és un objecte cofibrant de $\mathcal{S}$ i a més un àlgebra sobre $\mathcal{O}$, i que l'aplicació natural*

$$\mathrm{Map}((LX)^{\odot n}, LX) \longrightarrow \mathrm{Map}(X^{\odot n}, LX)$$

és una equivalència dèbil de conjunts simplicials per a tot n . Llavors LX és un àlgebra sobre $\mathcal{O}$ i l'aplicació de localització $l: X \rightarrow LX$ és un morfisme d'àlgebres sobre $\mathcal{O}$.

Les dues aplicacions principals d'aquest teorema es donen en la categoria de conjunts simplicials i en la categoria d'espectres simètrics. En la categoria de conjunts simplicials, qualsevol functor de localització satisfà les condicions del teorema, ja que, la localització commuta amb productes finits en aquesta categoria. Per tant, la localització d'un espai de llaços és homotòpicament equivalent a un espai de llaços. Aquest fet va ser demostrat amb altres mètodes en [Bou96], [Far96, 3.A.3] o [Baz01].

En la categoria d'espectres simètrics, donat un espectre anell X , l'aplicació

$$X \wedge \dots \wedge X \longrightarrow LX \wedge \dots \wedge LX$$

indueix una equivalència dèbil de conjunts simplicials

$$\mathrm{Map}(LX \wedge \dots \wedge LX, LX) \simeq \mathrm{Map}(X \wedge \dots \wedge X, LX)$$

quan el functor L commuta amb la suspensió o quan X i LX són ambdós connectius. En els dos casos, la localització d'un espectre anell (estricte) és homotòpicament equivalent a un espectre anell (estricte). La condició de connectivitat és necessària, ja que com hem vist en un exemple anterior, la secció de Postnikov de nivell zero de l'espectre anell $K(n)$ de la n -èsima teoria K de Morava no és ni tan sols un espectre anell homotòpic.

Aquesta tesi ha donat lloc a 5 articles de recerca, dels quals 2 ja ha estat publicats [CG05] [Gut05a], i 3 són en format de prepublicació [CGMV06], [Gut05b], [Gut06].

Agraïments

En primer lloc, voldria expressar el meu més sincer agraïment a Carles Casacuberta, que un dia ja fa cinc anys va acceptar convertir-se en director de tesi d'un estudiant de doctorat que venia de Logronyo. Durant tot aquest temps he après i gaudit de les matemàtiques amb ell, i també m'ha ensenyat moltes altres coses que no estan en els llibres. Tant en el terreny professional com en el personal he tingut sempre el seu suport. La seva constant ajuda, dedicació i paciència han fet possible aquesta memòria.

Voldria donar les gràcies també a totes les persones que han col·laborat d'alguna manera en la consecució d'aquest treball. A John Greenlees per donar-me l'oportunitat de passar dos mesos en el Isaac Newton Institute de Cambridge. Les converses mantingudes amb ell i amb Stefan Schwede em van permetre desenvolupar i completar les idees del Capítol 7 de la memòria. A Gustavo Granja, Mark Hovey i Neil Strickland per les seves observacions i nous enfocaments. A A. K. Bousfield pels seus valuosos suggeriments i comentaris sobre els Capítols 5 i 6 de la memòria. A Ieke Moerdijk, Pepijn van der Laan i Jeff Smith, les seves aportacions van ser fonamentals per a acabar l'últim capítol d'aquest treball.

Voldria agrair també el recolzament en tot moment dels membres del Grup de Topologia Algebraica de la Universitat Autònoma de Barcelona, especialment de la Gemma i del Ramón.

També voldria agrair a tot el Departament d'Àlgebra i Geometria de la Universitat de Barcelona, del que ara formo part, per la seva càlida acollida.

No podria oblidar-me dels meus professors de carrera de Logronyo: Ignacio, Tere i Luis Javier. Gràcies a ells vaig tenir l'oportunitat de poder venir a Barcelona a realitzar els meus estudis de doctorat, que conclouen amb aquesta memòria.

Finalment, donar les gràcies a la meva família, als meus pares i a la meva germana, que sempre han estat presents en els moments més difícils, i sobretot a l'Elena. A ells especialment va dedicada aquesta tesi.

Javier J. Gutiérrez Marín
Barcelona, maig de 2004

Capítol 1

Preliminars

1.1 Homotopia estable

Un fenomen *estable* en topologia algebraica és alguna cosa que succeeix independentment de la dimensió quan aquesta és suficientment gran. Un clar exemple de fenomen estable i que es pot considerar com un dels punts de partida de l'homotopia estable és el teorema de la suspensió de Freudenthal [Fre37], en el qual es demostra que donats dos CW-complexos de dimensió finita X i Y , l'aplicació induïda pel functor suspensió

$$[X, Y] \xrightarrow{\Sigma} [\Sigma X, \Sigma Y]$$

entre les classes d'homotopia d'aplicacions contínues és una bijecció si $\dim X < 2|Y| - 2$, on $|Y|$ denota el grau de connectivitat de Y , és a dir, $|Y| = \min\{k \mid [\Sigma^k S, Y] \neq 0\}$. Per tant, la successió

$$[X, Y] \xrightarrow{\Sigma} [\Sigma X, \Sigma Y] \xrightarrow{\Sigma} [\Sigma^2 X, \Sigma^2 Y] \longrightarrow \dots$$

s'estabilitza en algun moment. El teorema de la suspensió de Freudenthal té com a conseqüència que els grups d'homotopia de les esferes són estables quan la dimensió és suficientment alta. Més concretament, l'homomorfisme de grups

$$\pi_{n+k}(S^n) \longrightarrow \pi_{n+k+1}(S^{n+1})$$

és un isomorfisme quan $n > k + 1$.

A partir de l'estudi d'aquests fenòmens estables, sorgeix la idea de construir una categoria homotòpica en la qual desapareguin aquests problemes

depenents de la dimensió, és a dir, en la qual el functor suspensió sigui invertible.

El primer intent de categoria per a l'homotopia estable va ser la construïda per Spanier i Whitehead en 1953 [SW53]. Els objectes d'aquesta categoria són parells (X, n) , on X és un CW-complex i $n \in \mathbb{Z}$, i els morfismes entre dos objectes (X, n) i (Y, m) es defineixen com a

$$\{(X, n), (Y, m)\} = \operatorname{colim}_{k \rightarrow +\infty} [\Sigma^{k+n} X, \Sigma^{k+m} Y].$$

Dos objectes (X, n) i (Y, m) són equivalents si i només si $\Sigma^{k+n} X$ i $\Sigma^{k+m} Y$ són equivalents per a un k suficientment gran. Podem definir dos functors de suspensió: un formal $\sigma(X, n) = (X, n+1)$ i un altre geomètric $\Sigma(X, n) = (\Sigma X, n)$. Aquests dos functors són equivalents, és a dir, per a tot objecte (X, n) hi ha una equivalència natural $\sigma(X, n) \simeq \Sigma(X, n)$. El teorema de la suspensió de Freudenthal sempre és cert en la categoria de Spanier i Whitehead, independentment de la dimensió, això és, l'aplicació natural

$$\{(X, n), (Y, m)\} \longrightarrow \{\Sigma(X, n), \Sigma(Y, m)\}$$

és un isomorfisme per a qualsevol (X, n) i (Y, m) . Aquesta categoria té bones propietats, doncs és additiva i monoidal, amb un producte *smash* $\wedge$ definit per

$$(X, n) \wedge (Y, m) = (X \wedge Y, n + m).$$

Però presenta també alguns problemes. El principal és que no compleix el teorema de representabilitat de Brown. Hi ha teories de cohomologia que no estan representades per cap objecte d'aquesta categoria.

Després de la categoria de Spanier i Whitehead, el següent pas en la construcció de la categoria estable ve marcat pel concepte d'espectre. Els espectres són els objectes de la categoria homotòpica estable. La primera noció d'espectre es deu a Lima [Lim59]. Un espectre es defineix com una successió $\{E_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ d'espais (conjunts simplicials o CW-complexos) amb punt base, juntament amb aplicacions d'estructura

$$\varepsilon_n: \Sigma E_n \longrightarrow E_{n+1}.$$

D'alguna manera, un espectre tracta de contenir tota la informació possible d'un espai i les seves suspensions.

Al llarg dels anys 60 i després de la publicació d'alguns treballs, entre d'altres de Brown [Bro63], Puppe [Pup62] i Whitehead [Whi62a], [Whi62b], es fixen quines han de ser les principals característiques de la categoria homotòpica estable. Aquesta categoria ha de reunir els següents requisits:

- Tenir productes i coproductes arbitraris.
- Qualsevol teoria de cohomologia ha de ser representable (Teorema de representabilitat de Brown).
- Tenir un producte *smash* associatiu, commutatiu i unitari (és per tant una categoria monoidal).
- Ser una categoria triangulada.

La primera construcció d'una categoria que va reunir totes aquestes propietats va ser portada a terme per Boardman en 1964 en la seva tesi doctoral [Boa64]. A partir de llavors es van portar a terme diversos refinaments de la construcció original de Boardman. Potser el més estudiat i el que avui dia es té com a referència bàsica de la categoria homotòpica estable és el d'Adams [Ada74], que descriurem en la Secció 1.2.

El punt dèbil de la categoria d'Adams–Boardman és el de la construcció del producte *smash*. En aquesta categoria el producte *smash* d'espectres és associatiu i commutatiu únicament llevat d'homotopia. És a dir, la categoria d'espectres no és monoidal simètrica (encara que si que ho és la seva categoria homotòpica associada). Això fa que objectes que es defineixen utilitzant el producte *smash*, com poden ser els espectres anell i els espectres mòdul, siguin objectes que tenen sentit únicament en la categoria homotòpica.

Aquest problema va portar a reformular les característiques d'una bona categoria d'espectres, que són les següents (les definicions es recorden amb detall en les seccions 1.4 i 2.1):

- Estructura de categoria de models.
- Tensoritzada i cotensoritzada sobre conjunts simplicials (o espais topològics).
- Monoidal, simètrica i tancada.

- La seva categoria homotòpica, obtinguda invertint les equivalències dèbils, ha de ser equivalent a la d'Adams–Boardman.

La construcció d'una categoria d'espectres amb un producte *smash* estrictament associatiu, commutatiu i amb unitat ha estat un dels problemes importants dintre de la teoria d'homotopia estable. Aquest problema no es va poder solucionar fins a 30 anys després, amb l'aparició de dues noves categories per a modelar l'homotopia estable. Aquestes noves categories són la categoria dels S -mòduls [EKMM97], que recull les idees de Peter May i diversos coautors, i la categoria dels espectres simètrics [HSS00], deguda principalment a Jeff Smith.

Ambdues categories posseeixen un producte *smash* associatiu, commutatiu i amb unitat. A més a més estan dotades d'una estructura de categoria de models en el sentit de Quillen. La categoria d'espectres simètrics és tècnicament més simple que la dels S -mòduls, encara que cadascuna d'elles té les seves avantatges depenent de les aplicacions. No obstant això, les seves categories homotòpiques associades són equivalents a la categoria d'Adams–Boardman.

1.2 La categoria homotòpica estable

La referència bàsica per a la categoria homotòpica estable dels espectres és la desenvolupada per Adams en [Ada74]; també pot trobar-se una descripció d'aquesta categoria en [Rud98] o [Swi75]. En aquesta secció descriurem aquesta categoria, centrant-nos en les definicions i construccions bàsiques, el producte *smash* d'espectres i les teories d'homologia i cohomologia generalitzades. Les demostracions dels teoremes poden trobar-se principalment en [Ada74].

Definicions i propietats bàsiques

Definició 1.2.1. Un *espectre* E és una successió $\{E_n, \varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de CW-complexos E_n amb punt base i aplicacions $\varepsilon_n: \Sigma E_n \longrightarrow E_{n+1}$, on ΣE_n és la suspensió reduïda de E_n , és a dir, $\Sigma E_n = S^1 \wedge E_n$. A aquests espectres se'ls anomena *CW-espectres*. Un *subespectre* d'un espectre E és un espectre $\{F_n, \tau_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que F_n és un CW-subcomplex de E_n amb punt base i $\tau_n: \Sigma F_{n+1} \longrightarrow F_n$ és la restricció de ε_n a ΣF_{n+1} .

Si les aplicacions ε_n són equivalències dèbils per a un n suficientment gran, llavors es diu que l'espectre és un Σ -espectre o un *espectre suspensió*. Si les aplicacions adjuntes a les aplicacions d'estructura $\varepsilon'_n: E_n \longrightarrow \Omega E_{n+1}$ són equivalències dèbils per a tot $n \in \mathbb{Z}$, llavors es diu que E és un Ω -espectre.

Exemple 1.2.2. Donat un CW-complex X , podem associar-li un espectre $\Sigma^\infty X$ de la següent manera:

$$(\Sigma^\infty X)_n = \begin{cases} \Sigma^n X & \text{si } n \geq 0, \\ * & \text{si } n < 0, \end{cases}$$

on cada ε_n és la identitat. L'espectre $\Sigma^\infty X$ es diu *espectre suspensió de* X . Un cas particular important és el de *l'espectre de les esferes* $\Sigma^\infty S^0$, que denotarem simplement per S .

Exemple 1.2.3. Donat un grup abelià A , podem construir un Ω -espectre HA , que anomenarem *espectre d'Eilenberg–Mac Lane* associat a A , de la següent manera:

$$(HA)_n = \begin{cases} K(A, n) & \text{si } n \geq 0, \\ * & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Les aplicacions ε'_n són equivalències dèbils, ja que $\Omega K(A, n+1) \simeq K(A, n)$ i $\Omega K(A, 0) = *$.

Una propietat important dels espectres és que els podem suspendre i desuspendre tantes vegades com sigui necessari. Donat un espectre E i un enter k , es defineix un nou espectre $\Sigma^k E$, on $(\Sigma^k E)_n = E_{n+k}$ i l'aplicació $\Sigma(\Sigma^k E)_n \longrightarrow (\Sigma^k E)_{n+1}$ és ε_{n+k} .

Els grups d'homotopia d'un espectre són els grups d'homotopia estables. Per a un espectre donat E , tenim la següent successió d'homomorfismes

$$\pi_{n+k}(E_n) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{n+k+1}(\Sigma E_n) \xrightarrow{(\varepsilon_n)_*} \pi_{n+k+1}(E_{n+1}) \longrightarrow \dots$$

Es defineix el k -èsim grup d'homotopia, $\pi_k(E)$, com el límit directe d'aquest diagrama:

$$\pi_k(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi_{n+k}(E_n).$$

Exemple 1.2.4. En el cas de l'espectre d'Eilenberg–Mac Lane HA , tenim que

$$\pi_k(HA) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi_{n+k}(K(A, n)) = \begin{cases} A & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k \neq 0. \end{cases}$$

Per a cada CW-complex, els grups d'homotopia de l'espectre $\Sigma^\infty X$ es diuen grups d'homotopia estable de X :

$$\pi_k(\Sigma^\infty X) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi_{n+k}(\Sigma^n X) = \pi_k^s(X).$$

Una vegada que tenim els objectes de la categoria homotòpica estable, passem a descriure quins són els morfismes.

Definició 1.2.5. Siguin (E_n, ε_n) i (F_n, τ_n) dos espectres. Una *funció* entre espectres $f: E \rightarrow F$ és una família d'aplicacions cel·lulars que preserven el punt base $f_n: E_n \rightarrow F_n$ tals que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Sigma E_n & \xrightarrow{\Sigma f_n} & \Sigma F_n \\ \varepsilon_n \downarrow & & \downarrow \tau_n \\ E_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & F_{n+1} \end{array}$$

commuta per a tot $n \in \mathbb{Z}$.

Definició 1.2.6. Una *cel·la* d'un espectre E és una successió

$$(e, \Sigma e, \dots, \Sigma^k e, \dots),$$

on e és una cel·la d'algun E_n , de tal manera que e no és la suspensió de cap cel·la de E_{n-1} . Un subespectre F d'un espectre E es diu *cofinal* en E si cada cel·la de E va a parar en algun moment a F , és a dir, per a cada cel·la de E_n existeix un m tal que $\Sigma^m e$ està continguda en F_{n+m} .

Definició 1.2.7. Siguin E i F dos espectres. Considerem el conjunt $\mathcal{S}$ de tots els parells (E', f') tals que $E' \subset E$ és un subespectre cofinal i $f': E' \rightarrow F$ és una funció. Definim en $\mathcal{S}$ la següent relació d'equivalència: $(f', E') \sim (f'', E'')$ si i només si existeix un parell (E''', f''') on $E''' \subset E' \cap E''$, E''' és cofinal i $f' \upharpoonright E''' = f''' = f'' \upharpoonright E'''$. Anomenem *aplicació* d'espectres de E a F a cadascuna d'aquestes classes d'equivalència.

El següent pas serà definir quina és la categoria homotòpica dels espectres. Per a poder definir homotopies entre aplicacions d'espectres, hem de definir primer el producte *smash* d'un espectre amb un espai. Si (E_n, ε_n) és un espectre i X és un CW-complex, es defineix l'espectre $E \wedge X$ com a $(E \wedge X)_n = E_n \wedge X$. Les aplicacions d'estructura seran $\tilde{\varepsilon}_n = \varepsilon_n \wedge 1$.

Definició 1.2.8. Dues aplicacions d'espectres $f_0, f_1: E \longrightarrow F$ es diuen *homòtopes* i es denota $f_0 \simeq f_1$, si existeix una aplicació $H: E \wedge I^+ \longrightarrow F$ tal que $h \circ i_0 = f_0$ i $h \circ i_1 = f_1$, on $i_0, i_1: E \longrightarrow E \wedge I^+$ són les aplicacions induïdes per les inclusions de 0 i 1 en I^+ respectivament.

La relació d'homotopia entre aplicacions és una relació d'equivalència. El conjunt de classes d'equivalència d'aplicacions $f: E \longrightarrow F$ es denota per $[E, F]$. Una de les propietats fonamentals de la categoria homotòpica estable és que la suspensió dóna lloc a una bijecció natural $[E, F] \cong [\Sigma E, \Sigma F]$. Aquesta bijecció implica entre altres coses que el conjunt $[E, F]$ és un grup abelià per a cada E i F .

Definició 1.2.9. La *categoria homotòpica estable dels espectres* és la categoria que té per objectes els espectres i per morfismes les classes d'homotopia d'aplicacions d'espectres.

Podem donar una definició equivalent dels grups d'homotopia d'un espectre fent servir les classes d'homotopia, $\pi_r(E) = [\Sigma^r S, E]$. Tots els grups d'homotopia d'un espectre són grups abelians.

Definició 1.2.10. Un espectre E es diu *connectiu* si $\pi_i(E) = 0$ per a $i < 0$. De vegades també s'utilitza el terme *n-connex* per a un espectre E tal que $\pi_k(E) = 0$ si $k \leq n$. Així, un espectre connectiu és un espectre (-1) -connex.

Definició 1.2.11. Donat un espectre E , una *torre de Postnikov* de E és un diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & E_{(n+2)} & \longrightarrow & E_{(n+1)} & \longrightarrow & E_{(n)} & \longrightarrow & E_{(n-1)} & \longrightarrow & E_{(n-2)} & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & \nwarrow \tau_{n+2} & & \uparrow \tau_n & & \nearrow \tau_{n-1} & & \nwarrow \tau_{n-2} & & \\ & & & & & & E & & & & & & \end{array}$$

tal que, per a cada $k \in \mathbb{Z}$, tenim que:

- i) $\pi_i(E_{(k)}) = 0$ per a tot $i > k$.
- ii) L'aplicació $(\tau_i)_*: \pi_i(E) \longrightarrow \pi_i(E_{(k)})$ és un isomorfisme per a $i \leq k$.

L'espectre $E_{(n)}$ es diu la *n-èsima secció de Postnikov* de E . Per a tot espectre E existeix una torre de Postnikov, que es construeix inductivament i en la qual cada $E_{(k)}$ està determinat per E llevat d'equivalència [Rud98, Teorema 4.13].

Definició 1.2.12. Donada una aplicació d'espectres $f: E \longrightarrow F$, diem que la successió

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{i} C_f$$

és una *cofibració estricta*, on l'espectre C_f és el con de l'aplicació f , que es defineix prenent el con en cada f_n . Una successió de la forma

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$$

es diu que és una *cofibració* o un *triangle exacte* si existeix una aplicació $f: E \longrightarrow F$ i un diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y & \xrightarrow{\psi} & Z \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow \\ E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{i} & C_f \end{array}$$

que és commutatiu llevat d'homotopia, on α , β i γ són equivalències homotòpiques.

Cada cofibració $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ es pot allargar cap a la dreta i cap a l'esquerra indefinidament, originant una successió

$$\dots \longrightarrow \Sigma^{-1}Y \xrightarrow{\Sigma^{-1}g} \Sigma^{-1}Z \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \longrightarrow \dots$$

que dóna lloc a dues successions exactes [Ada74, III, Proposicions 3.9 i 3.10].

Teorema 1.2.13. *La cofibració $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ dóna lloc a dues successions exactes de grups abelians*

$$\begin{aligned} \dots &\longleftarrow [\Sigma^{-1}Z, E] \longleftarrow [X, E] \xleftarrow{f^*} [Y, E] \xleftarrow{g^*} [Z, E] \longleftarrow [\Sigma X, E] \longleftarrow \dots \\ \dots &\longrightarrow [E, \Sigma^{-1}Z] \longrightarrow [E, X] \xrightarrow{f_*} [E, Y] \xrightarrow{g_*} [E, Z] \longrightarrow [E, \Sigma X] \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

per a cada espectre E . □

Quan treballem amb CW-complexos, la primera d'aquestes successions és similar a la successió exacta associada amb una cofibració $f: X \longrightarrow Y$ amb cofibra Z , i la segona és similar a la successió exacta associada a una fibració $f: X \longrightarrow Y$ amb fibra $\Sigma^{-1}Z$. En la categoria homotòpica estable desapareix la distinció entre fibracions i cofibracions.

El producte *smash* d'espectres

Anteriorment hem definit el producte *smash* d'un espectre amb un CW-complex. Es pot construir un producte *smash* entre espectres que generalitzi aquest cas. La construcció d'aquest producte *smash* és bastant tècnica. La idea intuïtiva és la següent: donats dos espectres E i F , definim $E \wedge F$ com a $\lim_{n,m \rightarrow +\infty} E_n \wedge F_m$. Més concretament, si $E \wedge F = P$, llavors es defineix $P_k = E_{n(k)} \wedge F_{m(k)}$ de tal manera que $k = n(k) + m(k)$ i $n(k)$ i $m(k)$ tendeixen a infinit quan k tendeix a infinit. Una descripció detallada d'aquesta construcció es pot trobar en [Ada74, III, §4].

El que sí anem a descriure amb detall són les propietats fonamentals d'aquest producte *smash*, que són a més les propietats que ha de tenir un producte *smash* en qualsevol categoria estable:

- És un functor covariant en cadascuna de les seves dues components.
- Hi ha equivalències homotòpiques naturals:

$$\begin{aligned} a_{(E,F,G)} : (E \wedge F) \wedge G &\longrightarrow E \wedge (F \wedge G), \\ \tau_{(E,F)} : E \wedge F &\longrightarrow F \wedge E, \\ l : S \wedge E &\longrightarrow E, \\ r : E \wedge S &\longrightarrow E, \\ \Sigma_{(E,F)} : \Sigma E \wedge F &\longrightarrow \Sigma(E \wedge F). \end{aligned}$$

- Sigui $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una família d'espectres i siguin $i_\alpha : E_\alpha \longrightarrow \bigvee_{\alpha \in I} E_\alpha$ les corresponents inclusions. Llavors l'aplicació natural

$$\bigvee_{\alpha \in I} (E_\alpha \wedge F) \longrightarrow (\bigvee_{\alpha \in I} E_\alpha) \wedge F$$

donada per les aplicacions $i_\alpha \vee 1$ és una equivalència d'homotopia.

- Els següents diagrames que relacionen les equivalències homotòpiques naturals a , τ , l , i r commuten llevat d'homotopia:

$$\begin{array}{ccc} ((E \wedge F) \wedge G) \wedge H & \xrightarrow{a} (E \wedge F) \wedge (G \wedge H) & \xrightarrow{a} E \wedge (F \wedge (G \wedge H)) \\ \parallel & & \uparrow 1 \wedge a \\ ((E \wedge F) \wedge G) \wedge H & \xrightarrow{a \wedge 1} (E \wedge (F \wedge G)) \wedge H & \xrightarrow{a} E \wedge ((F \wedge G) \wedge H), \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
(E \wedge F) \wedge G & \xrightarrow{\tau \wedge 1} & (F \wedge E) \wedge G \xrightarrow{a} F \wedge (E \wedge G) \\
\downarrow a & & \downarrow 1 \wedge \tau \\
E \wedge (F \wedge G) & \xrightarrow{\tau} & (F \wedge G) \wedge E \xrightarrow{a} F \wedge (G \wedge E),
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
E \wedge F & \xlongequal{\quad} & E \wedge F \\
\downarrow \tau & & \uparrow \tau \\
F \wedge E & \xlongequal{\quad} & F \wedge E,
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
S \wedge S & \xrightarrow{1} & S \wedge S \\
\parallel & & \parallel \\
S \wedge S & \xrightarrow{\tau} & S \wedge S,
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
(S \wedge E) \wedge F & \xrightarrow{a} & S \wedge (E \wedge F) \\
\downarrow l \wedge 1 & & \downarrow l \\
E \wedge F & \xlongequal{\quad} & E \wedge F,
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
(E \wedge F) \wedge S & \xrightarrow{a} & E \wedge (F \wedge S) \\
\downarrow r & & \downarrow 1 \wedge r \\
E \wedge F & \xlongequal{\quad} & E \wedge F,
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
(E \wedge S) \wedge F & \xrightarrow{a} & E \wedge (S \wedge F) \\
\downarrow r \wedge 1 & & \downarrow 1 \wedge l \\
E \wedge F & \xlongequal{\quad} & E \wedge F,
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
S \wedge E & \xrightarrow{\tau} & E \wedge S \\
\downarrow l & & \downarrow r \\
E & \xlongequal{\quad} & E.
\end{array}$$

Donats dos espectres Y i Z , el functor $[- \wedge Y, Z]$ és un functor representable pel teorema de representabilitat de Brown. Per tant, existeix un espectre que denotem per $F(Y, Z)$, únic llevat d'homotopia, que compleix

$$[X \wedge Y, Z] \cong [X, F(Y, Z)]$$

i al que anomenem *espectre de funcions*. El functor $F(Y, -)$ és un adjunt per la dreta del functor $- \wedge Y$.

Homologia i cohomologia

Donat un espectre E i un enter k , es defineix la E -homologia i la E -cohomologia respectivament d'altre espectre X de la manera següent:

$$\begin{aligned}
E_k(X) &= \pi_k(E \wedge X) = [\Sigma^k S, E \wedge X], \\
E^k(X) &= \pi_{-k}(F(X, E)) = [X, \Sigma^k E].
\end{aligned}$$

L'espectre d'Eilenberg–Mac Lane HG dona lloc a l'homologia i cohomologia ordinàries amb coeficients en G . L'espectre S de les esferes dona lloc també a

una teoria d'homologia i cohomologia, anomenades homotopia i cohomotopia estable.

Per a cada grup abelià G , existeix un espectre MG , únic llevat d'homotopia amb les propietats següents:

- $\pi_i(MG) = 0$ per a $i < 0$.
- $\pi_0(MG) \cong G \cong (H\mathbb{Z})_0(MG)$.
- $(H\mathbb{Z})_i(MG) = 0$ per a $i \neq 0$.

L'espectre MG es diu *espectre de Moore* associat al grup abelià G . El teorema de Hurewicz [Rud98, II.4.6] relaciona els grups d'homotopia d'un espectre connectiu amb els seus grups d'homologia.

Teorema 1.2.14. *Sigui $\alpha: S \longrightarrow E$ una aplicació que indueix isomorfisme en π_0 i sigui X un espectre. Si $\pi_i(X) = 0$ per a $i < n$, llavors $E_i(X) = 0$ per a $i < n$ i l'aplicació*

$$\alpha_* = (\alpha \wedge 1)_*: \pi_k(X) \longrightarrow E_k(X)$$

és un isomorfisme per a $k = n$ i un epimorfisme per a $k = n + 1$. □

Corol·lari 1.2.15. *Si $f: X \longrightarrow Y$ és una aplicació entre espectres connectius tal que $(H\mathbb{Z})_k(f): (H\mathbb{Z})_k(X) \longrightarrow (H\mathbb{Z})_k(Y)$ és un isomorfisme per a tot $k \in \mathbb{Z}$, llavors f és una equivalència homotòpica.* □

Per a cada espectre X tenim un homomorfisme

$$h = (\iota \wedge 1)_*: \pi_k(X) \longrightarrow (H\mathbb{Z})_k(X),$$

on $\iota: S \longrightarrow H\mathbb{Z}$ correspon a la unitat de $\pi_0(H\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. L'homomorfisme h es diu homomorfisme de Hurewicz.

En la categoria homotòpica estable també hi ha un teorema de coeficients universals que relaciona l'homologia i cohomologia amb coeficients amb l'homologia entera [Rud98, II.4.9] i una fórmula de Künneth per a l'homologia del producte *smash* de dos espectres [Mar83, 6.2, Proposició 7].

Teorema 1.2.16. *Per a cada espectre E i cada grup abelià G tenim dues successions exactes curtes de grups abelians*

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Ext}((H\mathbb{Z})_{n-1}(E), G) &\longrightarrow (HG)^n(E) \longrightarrow \text{Hom}((H\mathbb{Z})_n(E), G) \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow (H\mathbb{Z})_n(E) \otimes G &\longrightarrow (HG)_n(E) \longrightarrow \text{Tor}((H\mathbb{Z})_{n-1}(E), G) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

per a tot $n \in \mathbb{Z}$. □

En particular, $\pi_0(HB \wedge HA) = (HB)_0(HA) \cong A \otimes B$ i $[HA, HB] = (HB)^0(HA) \cong \text{Hom}(A, B)$ per a qualssevol grups abelians A i B .

Teorema 1.2.17. *Donats dos espectres E i F qualssevol, tenim una successió exacta curta de grups abelians*

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} (H\mathbb{Z})_i(E) \otimes (H\mathbb{Z})_j(F) &\longrightarrow (H\mathbb{Z})_n(E \wedge F) \\ &\longrightarrow \bigoplus_{i+j=n-1} \text{Tor}((H\mathbb{Z})_i(E), (H\mathbb{Z})_j(F)) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

per a tot $n \in \mathbb{Z}$. □

Aquest teorema és vàlid també si substituïm $\mathbb{Z}$ per qualsevol anell R que sigui un domini d'ideals principals, canviant $\otimes$ i Tor per $\otimes_R$ i Tor_R respectivament.

1.3 Models per a la categoria homotòpica estable

La categoria d'espectres simètrics [HSS00] proporciona la construcció més simple d'una categoria d'espectres dotada d'un producte *smash* estricte, això és, un producte *smash* associatiu i commutatiu abans de passar a la categoria homotòpica. Amb aquest producte *smash*, aquesta categoria és simètrica i monoidal, i això permet una bona definició d'espectres anell (monoides en la categoria), espectres mòdul (mòduls sobre monoides en la categoria) i les seves respectives categories homotòpiques. Denotarem aquesta categoria per Sp^Σ .

Un *espectre simètric* és una successió de conjunts simplicials amb punt base $\{X_n\}_{n \geq 0}$ juntament amb aplicacions d'estructura

$$\sigma: S^1 \wedge X_n \longrightarrow X_{n+1}$$

que preserven el punt base, i una acció per l'esquerra del grup simètric Σ_n sobre X_n per a cada n . A més, la composició

$$\sigma^k = \sigma \circ (S^1 \wedge \sigma) \circ \dots \circ (S^{k-1} \wedge \sigma): S^k \wedge X_n \longrightarrow X_{n+k}$$

donada per les aplicacions $S^i \wedge S^1 \wedge X_{n+k-i+1} \xrightarrow{S^i \wedge \sigma} S^1 \wedge X_{n+k-i}$ és $\Sigma_k \times \Sigma_n$ -equivariant per a $k \geq 1$ i $n \geq 0$. Un *morfisme d'espectres simètrics* $f: X \longrightarrow$

Y és una successió d'aplicacions $f_n: X_n \longrightarrow E_n$ que conserven el punt base tal que cada f_n és Σ_n -equivariant i el diagrama

$$\begin{array}{ccc} S^1 \wedge X_n & \xrightarrow{\sigma} & X_{n+1} \\ 1 \wedge f_n \downarrow & & \downarrow f_{n+1} \\ S^1 \wedge Y_n & \xrightarrow{\sigma} & E_{n+1} \end{array}$$

és commutatiu per a cada $n \geq 0$.

És possible dotar a aquesta categoria d'una estructura de categoria de models simplicial [HSS00, §3 i §5] (veure la definició de categoria de models en la secció 2.1). Es defineix el conjunt simplicial

$$\mathrm{Map}_{Sp^\Sigma}(X, Y) = Sp^\Sigma(X \wedge \Delta[n]_+, Y).$$

Estenent els functors de conjunts simplicials $(-)^K$ i $- \wedge K$ segons [HSS00, Definició 1.2.9], es defineixen els espectres simètrics X^K i $X \otimes K$ per a tot espectre simètric X i tot conjunt simplicial K . Això ens dóna l'estructura simplicial en Sp^Σ . Es defineixen també les següents classes de morfismes en Sp^Σ :

- **Equivalències estables:** Una aplicació $f: X \longrightarrow Y$ és una equivalència estable si l'aplicació

$$E^0 f: E^0(Y) \longrightarrow E^0(X)$$

és un isomorfisme per a tot Ω -espectre injectiu E (veure [HSS00, Definició 3.1.1]).

- **Cofibracions estables:** Una aplicació f és una cofibració estable si té la propietat d'elevació per l'esquerra respecte a totes les aplicacions $g: X \longrightarrow Y$ tals que $g_n: X_n \longrightarrow Y_n$ és una fibració trivial de conjunts simplicials per a tot n .
- **Fibracions estables:** Una aplicació f és una fibració estable si té la propietat d'elevació per la dreta respecte a totes les aplicacions $g: X \longrightarrow Y$ tals que $g_n: X_n \longrightarrow Y_n$ és una cofibració trivial de conjunts simplicials per a tot n .

La categoria d'espectres simètrics amb les equivalències estables com a equivalències dèbils, les cofibracions estables com a cofibracions i les fibracions estables com a fibracions té estructura de categoria de models [HSS00, Secció 3.4].

Teorema 1.3.1. *La categoria d'espectres simètrics és una categoria de models simplicial, monoidal i simètrica, i la seva categoria homotòpica és equivalent a la d'Adams–Boardman.* $\square$

La categoria dels S -mòduls de Peter May [EKMM97] va ser la primera categoria de models per a l'homotopia estable amb un veritable producte *smash* estricta. Els S -mòduls es defineixen a partir d'espectres indexats no pels enters, sinó pel conjunt de subespais de dimensió finita d'un espai amb un producte real intern $U \cong \mathbb{R}^\infty$. Així, un espectre E assigna a cada subespai de dimensió finita V de U un espai amb punt base EV , juntament amb aplicacions (adjuntes) d'estructura

$$\tilde{\sigma}_{V,W}: EV \xrightarrow{\cong} \Omega^{W \setminus V} EW$$

quan $V \subset U$. L'espai $W \setminus V$ és el complement ortogonal de V en W , i $\Omega^W X$ és l'espai d'aplicacions $\text{Map}(S^W, X)$ que conserven el punt base, on S^W és la compactificació per un punt de W . A més, les aplicacions $\tilde{\sigma}_{V,W}$ han de ser homeomorfismes. Un morfisme d'espectres $f: E \rightarrow E'$ és una successió d'aplicacions que conserven el punt base $f_V: EV \rightarrow E'V$ tal que el següent diagrama commuta

$$\begin{array}{ccc} EV & \xrightarrow{f_V} & E'V \\ \tilde{\sigma}_{V,W} \downarrow & & \downarrow \tilde{\sigma}'_{V,W} \\ \Omega^{W \setminus V} EW & \xrightarrow{\Omega^{W \setminus V} f_W} & \Omega^{W \setminus V} E'W. \end{array}$$

La categoria dels S -mòduls també és una categoria amb una estructura de models, monoidal i simètrica [EKMM97, VII.4] i la seva categoria homotòpica és equivalent a la d'Adams–Boardman. No descriurem aquí l'estructura de categoria de models dels S -mòduls, ja que en la resta de la memòria utilitzarem únicament la categoria d'espectres simètrics quan necessitem treballar específicament en una categoria de models.

Encara que són de naturalesa bastant diferent, és possible establir un functor simètric i monoidal entre la categoria dels S -mòduls i la categoria d'espectres simètrics que indueix equivalències entre les respectives categories homotòpiques d'espectres anell i espectres mòdul [Sch01].

1.4 Axiomàtica de la categoria homotòpica estable

Les propietats formals de la categoria homotòpica estable dels espectres d'Adams i Boardman són compartides per una classe de categories que es diuen *categories homotòpiques estables*. Aquestes propietats comunes es descriuen en [Mar83] i [HPS97], on es dona un tractament axiomàtic d'aquestes categories. Essencialment, una categoria homotòpica estable és una categoria triangulada monoidal i tancada, juntament amb un conjunt de generadors que satisfan la dualitat de Spanier–Whitehead. La categoria homotòpica dels espectres d'Adams i Boardman és el prototip de categoria homotòpica estable, tot i que hi ha altres exemples tant topològics com algebraics, com veurem al final d'aquesta secció.

Començarem recordant les definicions de les estructures bàsiques d'una categoria homotòpica estable: és una categoria triangulada i monoidal. Les definicions i propietats més importants sobre categories triangulades poden trobar-se en el llibre de Neeman [Nee01]. Les categories monoidals estan desenvolupades per exemple en [Mac71].

Definició 1.4.1. Una *triangulació* en una categoria additiva $\mathcal{C}$ consisteix en un functor additiu $\Sigma: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ juntament amb una col·lecció de diagrames Δ , que anomenem *triangles exactes* o *cofibracions*, de la forma

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$$

i tals que

- i) Qualsevol diagrama isomorf a un diagrama de Δ està en Δ .
- ii) El diagrama $0 \longrightarrow X \xrightarrow{1} X \longrightarrow 0$ està en Δ per a tot X de $\mathcal{C}$.
- iii) Si el diagrama $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$ està en Δ , també ho està el diagrama $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma Y$.

- iv) Donada una aplicació $f: X \longrightarrow Y$, existeix un diagrama de la forma $X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$ que està en Δ .
- v) Si tenim un diagrama commutatiu de la forma

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & \Sigma X \\ f \downarrow & & \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow \Sigma f \\ U & \longrightarrow & V & \longrightarrow & W & \longrightarrow & \Sigma U \end{array}$$

en el qual les dues files estan en Δ , llavors existeix una aplicació (que no és única) $h: Z \longrightarrow W$ que fa que tot el diagrama commuti.

- vi) Es compleix l'axioma de l'octaedre de Verdier. Suposem que tenim aplicacions $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ i triangles exactes

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{f} Y \longrightarrow U \longrightarrow \Sigma X, \\ X &\xrightarrow{g \circ f} Z \longrightarrow V \longrightarrow \Sigma X, \\ Y &\xrightarrow{g} Z \longrightarrow W \longrightarrow \Sigma Y. \end{aligned}$$

Llavors tenim el diagrama commutatiu següent:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & U & \longrightarrow & \Sigma X \\ 1 \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow & & \downarrow 1 \\ X & \xrightarrow{g \circ f} & Z & \longrightarrow & V & \longrightarrow & \Sigma X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & W & \xrightarrow{1} & W & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma X & \xrightarrow{\Sigma f} & \Sigma Y & \longrightarrow & \Sigma U & \longrightarrow & \Sigma^2 X, \end{array}$$

on la primera i la segona fila i la segona columna són els triangles exactes donats, i cada fila i cada columna del diagrama és un triangle exacte.

Una *categoria triangulada* $\mathcal{C}$ és una categoria additiva juntament amb una triangulació. Aquesta definició de categoria triangulada és la que apareix en [Mar83] o [Nee01] i és equivalent a la definició de Verdier [Ver77].

Donat un triangle exacte o cofibració de la forma

$$\Sigma^{-1}Z \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z$$

anomenarem a Z la *cofibra* de f i a $\Sigma^{-1}Z$ la *fibra* de f . Si Z és la cofibra de f , ens referirem sovint a la successió $X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z$ com a una cofibració.

Un functor $L: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ diem que és un functor *exacte* o *triangulat* quan commuta amb el functor Σ , és a dir si hi ha un isomorfisme natural

$$L\Sigma X \longrightarrow \Sigma LX$$

per a tot X de $\mathcal{C}$. Un functor additiu $H: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}b$ on $\mathcal{A}b$ és la categoria de grups abelians es diu *exacte* si transforma triangles exactes en successions exactes de grups. Un *functor cohomològic* és un functor exacte contravariant $H: \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$ que envia coproductes a productes. Per exemple, el functor $\mathcal{C}(-, Y)$ és un functor cohomològic per a tot Y de $\mathcal{C}$. Un functor cohomològic H es diu *representable* si existeix un objecte Y de $\mathcal{C}$ i un isomorfisme natural de functors entre H i $\mathcal{C}(-, Y)$.

Una subcategoria $\mathcal{D}$ d'una categoria triangulada $\mathcal{C}$ es diu que és una *subcategoria localitzant* si està tancada per triangles exactes, coproductes i retracts, és a dir :

- i) Si $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$ és un triangle exacte en el qual entre X , Y i Z dos d'ells estan en $\mathcal{D}$, el tercer també ho està.
- ii) Qualsevol coproducte d'objectes de $\mathcal{D}$ està en $\mathcal{D}$.
- iii) Si Y és un objecte de $\mathcal{D}$ i tenim aplicacions $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} X$ amb $p \circ i = 1$, llavors X està en $\mathcal{D}$.

Definició 1.4.2. Una *categoria monoidal simètrica* $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, S, a, r, l, c)$ és una categoria $\mathcal{C}$ juntament amb un bifunctor covariant $- \otimes -: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, un objecte S de $\mathcal{C}$, al que anomenarem unitat, i isomorfismes naturals

$$\begin{aligned} a_{X,Y,Z}: (X \otimes Y) \otimes Z &\longrightarrow X \otimes (Y \otimes Z), \\ r_X: X \otimes S &\longrightarrow X, \quad l_X: S \otimes X \longrightarrow X, \\ c_{X,Y}: X \otimes Y &\longrightarrow Y \otimes X, \end{aligned}$$

per a X, Y i Z de $\mathcal{C}$ qualssevol, que compleixen certs axiomes de coherència que vénen donats per la commutativitat dels següents diagrames per a X, Y, Z i W objectes de $\mathcal{C}$:

$$\begin{array}{c}
 ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \xrightarrow{a} (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \xrightarrow{a} X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W)) \\
 \downarrow a \otimes 1 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \uparrow 1 \otimes a \\
 (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \xrightarrow{\qquad \qquad \qquad a \qquad \qquad \qquad} X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W),
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{a} X \otimes (Y \otimes Z) \xrightarrow{c} (Y \otimes Z) \otimes X \\
 \downarrow c \otimes 1 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow a \\
 (Y \otimes X) \otimes Z \xrightarrow{a} Y \otimes (X \otimes Z) \xrightarrow{1 \otimes c} Y \otimes (Z \otimes X),
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (X \otimes S) \otimes Y \xrightarrow{a} X \otimes (S \otimes Y) & & X \otimes Y \xrightarrow{c} Y \otimes X \\
 \downarrow r \otimes 1 \quad \swarrow 1 \otimes l & & \downarrow 1 \quad \swarrow c \\
 X \otimes Y & & X \otimes Y.
 \end{array}$$

Una categoria monoidal simètrica es diu *tancada* si per a tot objecte Y de $\mathcal{C}$, el functor $- \otimes Y: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ té un adjunt per la dreta. Aquest adjunt el denotarem per $\text{Hom}(Y, -)$ o $F(Y, -)$ i l'anomenarem *Hom intern* o *objecte de funcions intern*. Aquesta adjunció ens dóna una bijecció

$$\mathcal{C}(X \otimes Y, Z) \cong \mathcal{C}(X, \text{Hom}(Y, Z)) \quad (1.1)$$

per a X, Y i Z de $\mathcal{C}$ qualssevol.

Sigui ara $\mathcal{C}$ una categoria triangulada, monoidal simètrica i tancada. Direm que l'estructura monoidal de $\mathcal{C}$ i la triangulació són compatibles quan:

- i) El producte $\otimes$ conserva suspensions, és a dir, hi ha una equivalència natural

$$e_{X,Y}: \Sigma X \otimes Y \rightarrow \Sigma(X \otimes Y),$$

per a tots els X i Y de $\mathcal{C}$, tal que el següent diagrama és commutatiu

$$\begin{array}{ccc}
 (\Sigma X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{e \otimes 1} \Sigma(X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{e} \Sigma((X \otimes Y) \otimes Z) \\
 \downarrow a \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \Sigma a \\
 \Sigma X \otimes (Y \otimes Z) \xrightarrow{\qquad \qquad \qquad e \qquad \qquad \qquad} \Sigma(X \otimes (Y \otimes Z)).
 \end{array}$$

A partir d'aquesta equivalència podem construir isomorfismes

$$\mathrm{Hom}(\Sigma X, Y) \simeq \Sigma^{-1} \mathrm{Hom}(X, Y) \text{ i } \mathrm{Hom}(X, \Sigma Y) \simeq \Sigma \mathrm{Hom}(X, Y)$$

per a tots els X i Y de $\mathcal{C}$.

- ii) El producte $\otimes$ és exacte. Si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$ és un triangle exacte i W és un objecte de $\mathcal{C}$, llavors

$$X \otimes W \xrightarrow{f \otimes 1} Y \otimes W \xrightarrow{g \otimes 1} Z \otimes W \xrightarrow{h \otimes 1} \Sigma(X \otimes W)$$

és un triangle exacte.

- iii) El functor $\mathrm{Hom}(X, Y)$ és exacte en la segona variable (en el sentit de l'apartat anterior) i és exacte en la primera variable llevat el signe. Suposem que $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$ és un triangle exacte. Llavors, per a tot objecte W de $\mathcal{C}$, el diagrama

$$\Sigma^{-1} \mathrm{Hom}(X, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Z, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Y, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, W),$$

on les aplicacions són $-\mathrm{Hom}(h, 1)$, $\mathrm{Hom}(g, 1)$ i $\mathrm{Hom}(f, 1)$ respectivament, és un triangle exacte.

- iv) Per a $i, j \in \mathbb{Z}$, el següent diagrama commuta

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^i S \otimes \Sigma^j S & \xrightarrow{\simeq} & \Sigma^{i+j} S \\ \downarrow c & & \downarrow (-1)^{ij} \\ \Sigma^j S \otimes \Sigma^i S & \xrightarrow{\simeq} & \Sigma^{i+j} S. \end{array}$$

Un objecte X d'una categoria $\mathcal{C}$ additiva monoidal simètrica i tancada es diu que és *fortament dualitzable* si l'aplicació natural

$$\mathrm{Hom}(X, S) \otimes Y \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, Y)$$

és un isomorfisme per a tot Y de $\mathcal{C}$.

Ara ja podem presentar els axiomes d'una categoria homotòpica estable en el sentit de Hovey–Palmieri–Strickland [HPS97].

Definició 1.4.3. Una *categoria homotòpica estable* és una categoria $\mathcal{C}$ amb la següent estructura:

- i) Una triangulació en $\mathcal{C}$.
- ii) Una estructura de categoria monoidal simètrica i tancada compatible amb la triangulació.
- iii) Un conjunt $\mathcal{G}$ d'objectes fortament dualitzables, de tal manera que l'única subcategoria localitzant de $\mathcal{C}$ que conté a $\mathcal{G}$ és $\mathcal{C}$.
- vi) Existeixen coproductes arbitraris en $\mathcal{C}$.
- v) Tot functor cohomològic en $\mathcal{C}$ és representable.

Exemple 1.4.4. A continuació veurem alguns exemples de categories homotòpiques estables [HPS97, Exemple 1.2.3].

- i) La categoria homotòpica dels espectres és el prototip de categoria homotòpica estable. En aquesta categoria el functor Σ és la suspensió, els triangles exactes són les cofibracions i el producte $\otimes$ és el producte *smash* d'espectres $\wedge$. Els objectes $\mathrm{Hom}(-, -)$, que en aquesta categoria es denoten per $F(-, -)$, s'obtenen com adjunts del producte *smash* per representabilitat de Brown. El conjunt $\mathcal{G}$ està format per l'espectre de les esferes S que és la unitat de la categoria monoidal.
- ii) La categoria derivada $\mathcal{D}(R)$ d'un anell commutatiu amb unitat R . Aquesta categoria es defineix com la categoria homotòpica de la categoria de complexos de cadenes no acotats de R -mòduls. Tenim un functor Σ que ve donat per la translació d'índexs en el complex de cadenes. La categoria $\mathcal{D}(R)$ és triangulada i el producte $\otimes$, la unitat del qual és R , és derivat del producte tensorial de R -mòduls. Els objectes $\mathrm{Hom}(-, -)$ són derivats del Hom entre R -mòduls.
- iii) Altres exemples són la categoria d'espectres amb una acció de G , on G és un grup de Lie compacte, la categoria de complexos de cocadenes injectius sobre un àlgebra de Hopf commutativa, la categoria derivada de E -mòduls, on E és una S -àlgebra commutativa en el sentit de [EKMM97] o la categoria d'espectres locals respecte a un functor de localització homològic.

Capítol 2

Localització en categories de models simplicials

La noció de f -localització respecte a un morfisme f pot definir-se en qualsevol categoria $\mathcal{C}$ que tingui una estructura de categoria de models simplicial. No obstant això, per a assegurar l'existència d'aquests functors de f -localització cal afegir algunes hipòtesis addicionals a la categoria $\mathcal{C}$. En aquest capítol veurem quines són aquestes condicions i demostrarem l'existència d'un functor de localització L_f en qualsevol categoria de models simplicial sota aquestes hipòtesis.

La construcció d'aquest functor utilitza com a base el *small object argument* de Quillen [Hir03, 10.5], i és similar a la que es realitza per a demostrar l'existència de localitzacions en els casos de les categories de CW-complexos o conjunts simplicials [Far96], [Hir03]. Fent servir el *small object argument* podem factoritzar de manera functorial l'aplicació $X \longrightarrow *$ mitjançant una cofibració trivial $l_X: X \longrightarrow L_f X$, que serà l'aplicació de f -localització, seguida d'una fibració. Anàlogament l'aplicació $\emptyset \longrightarrow X$ pot factoritzar-se per una cofibració seguida d'una fibració trivial. Això permet definir una nova estructura de models $L_f \mathcal{C}$ en $\mathcal{C}$, que es diu *estructura de models localitzada*, i en la qual les equivalències dèbils són les aplicacions tals que el functor de f -localització converteix en equivalències dèbils en $\mathcal{C}$, i les cofibracions són les mateixes que les de $\mathcal{C}$.

Començarem el capítol amb les definicions i resultats bàsics de categories de models simplicials. La primera definició de categoria de models apareix en [Qui67]. Les monografies [Hov99], [Hir03] i [DHKS04] proporcionen un tracta-

ment més modern i complet sobre categories de models i les seves propietats. En la segona secció tractarem sobre objectes petits i categories localment presentables [AR94]. Aquests conceptes formen part de les condicions necessàries sobre la categoria $\mathcal{C}$ perquè existeixin les f -localitzacions, que construirem explícitament en l'última part del capítol.

2.1 Categories de models simplicials

Treballarem amb la definició de categoria de models que apareix en [Hov99] o [Hir03]. Aquesta definició és lleugerament més forta que la definició clàssica de Quillen de categoria de models tancada, ja que suposa que la categoria és completa i cocompleta, és a dir, conté tots els límits i colímits petits (no només els finits) i a més a més s'exigeix que la factorització dels morfismes sigui functorial (veure axioma (M5)).

Definició 2.1.1. Una *categoria de models* és una categoria $\mathcal{C}$ juntament amb tres classes de morfismes (que anomenarem equivalències dèbils, fibracions i cofibracions), que compleixen els següents cinc axiomes:

- (M1) $\mathcal{C}$ està tancada per límits i colímits petits, és a dir, per a tota categoria petita I i tot functor $F: I \longrightarrow \mathcal{C}$ existeixen $\lim_I F$ i $\operatorname{colim}_I F$ en $\mathcal{C}$. També es diu que $\mathcal{C}$ és *completa* i *cocompleta*.
- (M2) Si f i g són morfismes de $\mathcal{C}$ tals que $g \circ f$ està definit i entre f , g i $g \circ f$ dos d'ells són equivalències dèbils, llavors el tercer també ho és.
- (M3) Donat un diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{r} & A \\ f \downarrow & & g \downarrow & & f \downarrow \\ B & \xrightarrow{i'} & Y & \xrightarrow{r'} & B \end{array}$$

en el qual $r \circ i = 1_A$ i $r' \circ i' = 1_B$ (en aquest cas diem que f és un *retracte* de g), si g és una equivalència dèbil, una fibració o una cofibració, també ho és f .

(M4) Si tenim un diagrama commutatiu en $\mathcal{C}$ de la forma

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

on i és una cofibració i p és una fibració, llavors si i o p és a més una equivalència dèbil, existeix una elevació (representada per la fletxa discontinua) que fa commutatiu tot el diagrama.

(M5) Qualsevol morfisme f de $\mathcal{C}$ té dues factoritzacions functorials:

- $f = p \circ i$, on i és una cofibració i p és una fibració i una equivalència dèbil
- $f = q \circ j$, on q és una fibració i j és una cofibració i una equivalència dèbil.

Diem que un morfisme f és una *fibració (cofibració) trivial* si és una fibració (cofibració) i una equivalència dèbil. Un objecte X de $\mathcal{C}$ és *fibrant* si l'aplicació de X a l'objecte final $X \longrightarrow *$ és una fibració. Dualment, X és *cofibrant* quan l'aplicació de l'objecte inicial a ell mateix $\emptyset \longrightarrow X$ és una cofibració.

Definició 2.1.2. Si $i: A \longrightarrow B$ i $p: X \longrightarrow Y$ són dos morfismes per als quals existeix l'elevació (fletxa discontinua) en tot diagrama commutatiu de la forma

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y, \end{array}$$

llavors diem que

- i té la *propietat d'elevació a esquerra* respecte a p .
- p té la *propietat d'elevació a dreta* respecte a i .

Dels axiomes de la definició de categoria de models es dedueix que co-neixent dos de les tres classes de morfismes (equivalències dèbils, fibracions i cofibracions), podem determinar la tercera [Hir03, Proposicions 7.2.3 i 7.2.6].

Proposició 2.1.3. *Sigui $\mathcal{C}$ una categoria de models.*

- i) *Una aplicació és una cofibració (cofibració trivial) si i només si té la propietat d'elevació a esquerra respecte a totes les fibracions trivials (fibracions).*
- ii) *Una aplicació és una fibració (fibració trivial) si i només si té la propietat d'elevació a dreta respecte a totes les cofibracions trivials (cofibracions).*
- iii) *Una aplicació és una equivalència dèbil si i només si es pot factoritzar com una cofibració trivial seguida d'una fibració trivial.* $\square$

Una categoria $\mathcal{C}$ es diu que és *cofibrantment generada* si les fibracions són detectades per un conjunt de cofibracions trivials, és a dir, existeix un conjunt J de cofibracions trivials en $\mathcal{C}$ tal que una aplicació és una fibració si i només si té la propietat d'elevació a dreta respecte a tots els elements de J . Els elements de J es diuen *cofibracions trivials generadores*.

La següent proposició mostra algunes propietats de clausura de les classes de fibracions i cofibracions [Hir03, Proposicions 7.2.4 i 7.2.5].

Proposició 2.1.4. *Sigui $\mathcal{C}$ una categoria de models.*

- i) *Les classes de fibracions i cofibracions estan tancades per composició.*
- ii) *Les classes de fibracions i fibracions trivials estan tancades per productes.*
- iii) *Les classes de cofibracions i cofibracions trivials estan tancades per coproductes.* $\square$

Una categoria simplicial és una categoria $\mathcal{C}$ enriquida en conjunts simplicials, és a dir, per a cada parell d'objectes X i Y de $\mathcal{C}$, tenim un conjunt simplicial $\text{Map}(X, Y)$ tal que el seu conjunt de vèrtexs correspon als morfismes en $\mathcal{C}$ entre X i Y . Una categoria de models simplicial $\mathcal{C}$ és una categoria simplicial que també és categoria de models, juntament amb construccions naturals d'objectes $X \otimes K$ i X^K en $\mathcal{C}$, on X és un objecte de $\mathcal{C}$ i K és un conjunt simplicial, que compleixen uns certs axiomes.

Definició 2.1.5. Una *categoria simplicial* $\mathcal{C}$ és una categoria tal que

- i) Per a cada parell d'objectes X i Y de $\mathcal{C}$ tenim un conjunt simplicial, que denotarem per $\text{Map}(X, Y)$.
- ii) Per a cada tres objectes X , Y i Z de $\mathcal{C}$ hi ha una aplicació

$$c_{X,Y,Z}: \text{Map}(Y, Z) \times \text{Map}(X, Y) \longrightarrow \text{Map}(X, Z)$$

tal que el següent diagrama commuta per a X , Y , Z i W de $\mathcal{C}$:

$$\begin{array}{ccc}
 (\text{Map}(Y, Z) \times \text{Map}(X, Y)) \times \text{Map}(W, X) & \xrightarrow{c_{X,Y,Z} \times 1} & \text{Map}(X, Z) \times \text{Map}(W, X) \\
 \downarrow \cong & & \downarrow c_{W,X,Z} \\
 \text{Map}(Y, Z) \times (\text{Map}(X, Y) \times \text{Map}(W, X)) & & \\
 \downarrow 1 \times c_{W,X,Y} & & \\
 \text{Map}(Y, Z) \times \text{Map}(W, Y) & \xrightarrow{c_{W,Y,Z}} & \text{Map}(W, Z).
 \end{array}$$

- iii) Per a cada objecte X de $\mathcal{C}$, hi ha una aplicació de conjunts simplicials $i_X: * \longrightarrow \text{Map}(X, X)$ que fa que els següents diagrames commutin per a tot X i Y de $\mathcal{C}$:

$$\begin{array}{ccc}
 * \times \text{Map}(X, Y) & \xrightarrow{i_Y \times 1} & \text{Map}(Y, \times \text{Map}(X, Y)) \\
 \downarrow \cong & \swarrow c_{X,Y,Y} & \\
 \text{Map}(X, Y) & & \\
 \text{Map}(X, Y) \times * & \xrightarrow{1 \times i_X} & \text{Map}(X, Y \times \text{Map}(X, X)) \\
 \downarrow \cong & \swarrow c_{X,X,Y} & \\
 \text{Map}(X, Y) & &
 \end{array}$$

- iv) Per a cada parell d'objectes X i Y de $\mathcal{C}$, hi ha un isomorfisme

$$\text{Map}(X, Y)_0 \cong \mathcal{C}(X, Y).$$

Definició 2.1.6. Una *categoria de models simplicial* és una categoria simplicial que també és categoria de models i que satisfà els dos axiomes següents:

- (M6) Per a cada parell d'objectes X i Y de $\mathcal{C}$ i per a tot conjunt simplicial K , existeixen objectes $X \otimes K$ i Y^K de $\mathcal{C}$ tals que tenim les següents equivalències naturals de conjunts simplicials

$$\mathrm{Map}(X \otimes K, Y) \simeq \mathrm{Map}(K, \mathrm{Map}(X, Y)) \simeq \mathrm{Map}(X, Y^K).$$

- (M7) Si $i: A \longrightarrow B$ i $p: X \longrightarrow Y$ són una cofibració i una fibració en $\mathcal{C}$ respectivament, llavors l'aplicació de conjunts simplicials

$$\mathrm{Map}(B, X) \longrightarrow \mathrm{Map}(A, X) \times_{\mathrm{Map}(A, Y)} \mathrm{Map}(B, Y)$$

és una fibració, que és trivial si i o p és una equivalència dèbil.

L'isomorfisme de conjunts simplicials de (M6) dóna lloc en grau zero a una bijecció natural de conjunts

$$\mathcal{C}(X \otimes K, Y) \cong s\mathrm{Sets}(K, \mathrm{Map}(X, Y)) \cong \mathcal{C}(X, Y^K). \quad (2.1)$$

Una categoria de models es diu que és *pròpia* si les equivalències dèbils es preserven per *pushouts* i *pullbacks* a través de fibracions i cofibracions respectivament.

Definició 2.1.7. Sigui $\mathcal{C}$ una categoria de models.

- i) Diem que $\mathcal{C}$ és *pròpia per l'esquerra* si donat qualsevol diagrama tipus *pushout*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & C \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ B & \longrightarrow & D \end{array}$$

en el qual f és una equivalència dèbil i h és una cofibració, llavors g és una equivalència dèbil.

- ii) Diem que $\mathcal{C}$ és *pròpia per la dreta* si donat qualsevol diagrama tipus *pullback*

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{k} & D \end{array}$$

en el qual g és una equivalència dèbil i k és una fibració, llavors f és una equivalència dèbil.

2.2 Objectes petits i categories localment presentables

Sigui $\mathcal{C}$ una categoria de models cocompleta i λ un ordinal. Una λ -*successió* en $\mathcal{C}$ és un functor $I: \lambda \longrightarrow \mathcal{C}$, és a dir, un diagrama en $\mathcal{C}$

$$I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_\beta \longrightarrow \cdots \quad (\beta < \lambda)$$

tal que per a cada ordinal límit $\gamma < \lambda$ l'aplicació induïda

$$\text{colím}_{\beta < \gamma} I_\beta \longrightarrow I_\gamma$$

és un isomorfisme. La composició de la λ -successió es defineix com l'aplicació natural

$$I_0 \longrightarrow \text{colím}_{\beta < \lambda} I_\beta.$$

Definició 2.2.1. Sigui κ un cardinal. Un objecte X de $\mathcal{C}$ és κ -*petit* si per a tot cardinal regular $\lambda \geq \kappa$ i tota λ -successió

$$I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_\beta \longrightarrow \cdots \quad (\beta < \lambda)$$

en $\mathcal{C}$, l'aplicació natural de conjunts

$$\text{colím}_{\beta < \lambda} \mathcal{C}(X, I_\beta) \longrightarrow \mathcal{C}(X, \text{colím}_{\beta < \lambda} I_\beta)$$

és una bijecció. També es diu que el functor $\mathcal{C}(X, -)$ conserva colímits de longitud $\lambda \geq \kappa$. Un objecte és *petit* si és κ -petit per a algun cardinal κ .

Aquesta definició és equivalent a dir que si un objecte X és κ -petit, llavors per a tot cardinal regular $\lambda \geq \kappa$, qualsevol aplicació $f: X \longrightarrow \text{colím}_{\beta < \lambda} I_\beta$ factoritza a través de I_α per a algun $\alpha < \lambda$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \text{colím}_{\beta < \lambda} I_\beta \\ & \searrow g & \uparrow i_\alpha \\ & & I_\alpha. \end{array}$$

Aquesta factorització és a més única en el sentit que si existeixen g i g' tals que $f = i_\alpha \circ g = i_\alpha \circ g'$, llavors existeix $\alpha' \geq \alpha$ tal que

$$I(\alpha \rightarrow \alpha') \circ g = I(\alpha \rightarrow \alpha') \circ g'.$$

El concepte d'objecte petit és un cas particular d'objecte presentable. Els objectes presentables apareixen en l'estudi de les categories localment presentables, en les que com veurem tot objecte és petit. Aquestes categories van ser definides per Gabriel i Ulmer en [GU71]. La monografia d'Adámek i Rosický [AR94] és també una referència bàsica.

Sigui κ un cardinal regular. Un conjunt d'índexs I és un *conjunt κ -dirigit* si tot subconjunt de I de cardinalitat menor que κ té una cota superior.

Definició 2.2.2. Sigui κ un cardinal regular. Un objecte X de $\mathcal{C}$ és *κ -presentable* si el functor $\mathcal{C}(X, -)$ conserva colímits sobre conjunts d'índexs que siguin κ -dirigits.

Observeu que si X és κ -dirigit, llavors també és κ' -dirigit per a qualsevol cardinal regular $\kappa' \geq \kappa$.

Lema 2.2.3. *Sigui κ un cardinal regular. Llavors κ és un conjunt λ -dirigit per a tot cardinal regular $\lambda \leq \kappa$.*

Demostració. Sigui λ un cardinal regular que compleix que $\lambda \leq \kappa$, i sigui $J \subset \kappa$ tal que $\text{card}(J) < \lambda$. Per a cada $j \in J$, sigui $\kappa_j = \text{card}\{i \in \kappa \mid i \leq j\}$. Llavors, $\kappa_j < \kappa$ per a tot $j \in J$ i $\kappa \neq \bigcup_{j \in J} \kappa_j$ ja que κ és un cardinal regular. Per tant existeix un $i_0 \in \kappa$ tal que $i_0 > j$ per a tot $j \in J$. $\square$

Aquest lema implica en particular que tot cardinal regular κ és un conjunt κ -dirigit i per tant, tot objecte κ -presentable és κ -petit. El recíproc no és cert en general.

Definició 2.2.4. Una categoria $\mathcal{C}$ es diu *localment κ -presentable* si existeix un conjunt $\mathcal{A}$ d'objectes κ -presentables de $\mathcal{C}$ tals que qualsevol objecte de la categoria és el colímit sobre un conjunt κ -dirigit d'elements de $\mathcal{A}$. Una categoria és *localment presentable* si és localment κ -presentable per a algun cardinal regular κ .

Proposició 2.2.5. *Si $\mathcal{C}$ és una categoria localment presentable, llavors tot objecte de $\mathcal{C}$ és petit.*

Demostració. Suposem que $\mathcal{C}$ sigui localment κ -presentable i sigui $\mathcal{A}$ el conjunt d'objectes κ -presentables associat a $\mathcal{C}$. En particular, els elements de $\mathcal{A}$ són κ -petits, com a conseqüència del Lema 2.2.3. Si $X \notin \mathcal{A}$, llavors

$X = \text{colím}_{i \in I} D_i$, on I és un conjunt κ -dirigit i cada D_i és κ -presentable, i en particular κ -petit. Sigui $\mu = \text{card}(I)$. Veiem que X és ν -petit, on $\nu > \max(\kappa, \mu)$. Sigui λ un cardinal regular tal que $\lambda \geq \nu$ i $I: \lambda \rightarrow \mathcal{C}$ una λ -successió. Donada una aplicació $f: X \rightarrow \text{colím}_{\beta < \lambda} I_\beta$ qualsevol, com que D_i és κ -petit i $\lambda > \kappa$, la composició $d_i \circ f$ factoritza a través d'algun I_{α_i} :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \text{colím}_{\beta < \lambda} I_\beta \\ \uparrow d_i & & \uparrow \\ D_i & \xrightarrow{\quad} & I_{\alpha_i}. \end{array}$$

Sigui ara $\alpha = \sup\{\alpha_i \mid i \in I\}$. Aquest suprem existeix i a més $I_\alpha \neq \text{colím}_{\beta < \lambda} I_\beta$, ja que $\text{card}\{\alpha_i \mid i \in I\} \leq \mu$. Per a tot $i \in I$, la composició $d_i \circ f$ factoritza llavors a través d'un únic I_α :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \text{colím}_{\beta < \lambda} I_\beta \\ \uparrow d_i & & \uparrow \\ D_i & \xrightarrow{\quad} & I_\alpha. \end{array}$$

Tenim per tant per a cada $i \in I$ una aplicació $D_i \rightarrow I_\alpha$, que ens proporciona per la propietat universal del colímit una aplicació

$$X = \text{colím}_{i \in I} D_i \rightarrow I_\alpha,$$

i per tant X és ν -petit. □

2.3 Construcció de f -localitzacions

Sigui $\mathcal{C}$ una categoria de models simplicial. Una *localització homotòpica* és un functor $L: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ juntament amb una transformació natural $l: \text{Id} \rightarrow L$ que conserva equivalències dèbils, pren valors fibrants i l'aplicació $l_X: X \rightarrow LX$ és una cofibració tal que per a cada X que sigui cofibrant i cada Y , el morfisme

$$\text{Map}(LX, LY) \rightarrow \text{Map}(X, LY)$$

induït per l_X és una equivalència dèbil de conjunts simplicials. Els functors de f -localització són un cas particular de localitzacions homotòpiques; de fet,

llevat de certes hipòtesis de teoria de conjunts, totes les localitzacions homotòpiques són f -localitzacions per a alguna aplicació f . Aquest resultat, demostrat en la categoria de grups en [CS01] i en la categoria de conjunts simplicials en [CSS04], pot generalitzar-se a localitzacions homotòpiques en una categoria de models simplicial qualsevol [CC04].

L'existència de f -localitzacions per a tota aplicació f i per a tot objecte d'una categoria $\mathcal{C}$ està garantida quan la categoria $\mathcal{C}$ és simplicial i compleix certes hipòtesis. L'eina principal per a provar l'existència de functors de localització és el *small object argument* (veure [Qui67], [Hir03, 10.5]), que ens permet construir factoritzacions functorials en categories de models. La següent construcció està basada en idees de [Bou77] i [Hir03].

Sigui $\mathcal{C}$ una categoria de models simplicial i sigui $f: A \longrightarrow B$ una cofibració entre objectes cofibrants. Suposarem les següents hipòtesis addicionals sobre la categoria $\mathcal{C}$ per a poder construir la f -localització:

- i) $\mathcal{C}$ és pròpia per l'esquerra.
- ii) $\mathcal{C}$ és cofibrantment generada. Denotarem per J el conjunt de cofibracions trivials generadores.
- iii) Els objectes A , $\Delta[n] \otimes A \coprod_{\partial\Delta[n] \otimes A} \partial\Delta[n] \otimes B$ i tots els dominis d'elements de J són petits.

La hipòtesi iii) es compleix per exemple si la categoria $\mathcal{C}$ és localment presentable (veure Proposició 2.2.5). Començarem amb la definició de f -localització en una categoria de models simplicial.

Definició 2.3.1. Sigui $\mathcal{C}$ una categoria de models simplicial i siguin X un objecte de $\mathcal{C}$ i $f: A \longrightarrow B$ una cofibració entre objectes cofibrants.

- i) X és f -local si és fibrant i l'aplicació induïda

$$\mathrm{Map}(B, X) \longrightarrow \mathrm{Map}(A, X)$$

és una equivalència dèbil de conjunts simplicials.

- ii) Una aplicació $g: X \longrightarrow Y$ és una f -equivalència si existeix una aproximació cofibrant $\tilde{g}: \tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y}$ de g tal que l'aplicació induïda

$$\mathrm{Map}(\tilde{Y}, Z) \longrightarrow \mathrm{Map}(\tilde{X}, Z)$$

és una equivalència dèbil de conjunts simplicials, per a tot objecte Z que sigui f -local.

Donat un objecte X de $\mathcal{C}$, una f -localització de X es defineix com un morfisme $X \longrightarrow L_f X$ que és una f -equivalència i on l'objecte $L_f X$ és f -local.

Els següents resultats mostren algunes de les propietats de clausura dels objectes f -locals i les f -equivalències respecte a retracts i a límits i colímits homotòpics.

Lema 2.3.2. *Donat un objecte X de $\mathcal{C}$, si X és f -local i $Y \longrightarrow X$ és una aplicació amb una inversa homotòpica per l'esquerra, llavors Y és f -local.*

Demostració. Podem factoritzar l'aplicació $Y \longrightarrow X$ com una cofibració $Y \longrightarrow Z$ seguida d'una fibració trivial $Z \longrightarrow X$, per (M5). Així doncs, com succeeix en [Hir03, Proposició 1.2.5], l'aplicació de conjunts simplicials induïda

$$\mathrm{Map}(f, Y): \mathrm{Map}(B, X) \longrightarrow \mathrm{Map}(A, X)$$

és un retractor de $\mathrm{Map}(f, Z)$ i per tant és una equivalència dèbil de conjunts simplicials. $\square$

Lema 2.3.3. *Tot límit homotòpic d'objectes f -locals és f -local.*

Demostració. Sigui I una categoria petita i $D: I \longrightarrow \mathcal{C}$ un diagrama en $\mathcal{C}$ tal que D_i és f -local per a tot $i \in I$. Llavors,

$$\begin{aligned} \mathrm{Map}(B, \mathrm{holim}_{i \in I} D_i) &\simeq \mathrm{holim}_{i \in I} \mathrm{Map}(B, D_i) \\ &\simeq \mathrm{holim}_{i \in I} \mathrm{Map}(A, D_i) \simeq \mathrm{Map}(B, \mathrm{holim}_{i \in I} D_i) \end{aligned}$$

i per tant, $\mathrm{holim}_{i \in I} D_i$ és f -local. $\square$

Observació 2.3.4. De manera anàloga podem demostrar que tot colímit homotòpic de f -equivalències és una f -equivalència, i que tot retractor homotòpic d'una f -equivalència torna a ser una f -equivalència.

Demostrem ara l'existència de f -localitzacions en qualsevol categoria de models simplicial que compleixi les hipòtesis anteriors. Donat un objecte X de $\mathcal{C}$, necessitem construir un objecte $L_f X$ que sigui f -local juntament amb una f -equivalència $X \longrightarrow L_f X$. La construcció serà de caràcter functorial.

En primer lloc, l'objecte $L_f X$ ha de ser f -local, per tant fibrant, és a dir, l'aplicació $L_f \longrightarrow *$ tindrà la propietat d'elevació a dreta respecte a totes les aplicacions de J (conjunt de cofibracions trivials generadores). L'axioma (M7) implica que si $L_f X$ és fibrant, llavors l'aplicació induïda

$$\text{Map}(B, L_f X) \xrightarrow{f^*} \text{Map}(A, L_f X)$$

és una fibració de conjunts simplicials. Per tant, si $L_f X$ és fibrant, llavors és f -local si i només si f^* és una fibració trivial de conjunts simplicials, és a dir, té la propietat d'elevació a dreta respecte a la família d'inclusions $\partial\Delta[n] \longrightarrow \Delta[n]$ per a tot $n \geq 0$:

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta[n] & \longrightarrow & \text{Map}(B, L_f X) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow f^* \\ \Delta[n] & \longrightarrow & \text{Map}(A, L_f X). \end{array}$$

L'isomorfisme $s\mathcal{S}ets(K, \text{Map}(Y, Z)) \cong \mathcal{C}(K \otimes Y, Z)$ de (2.1), per a tot conjunt simplicial K i per a Y, Z objectes de $\mathcal{C}$, transforma el diagrama anterior en el següent:

$$\begin{array}{ccc} \Delta[n] \otimes A \coprod_{\partial\Delta[n] \otimes A} \partial\Delta[n] \otimes B & \longrightarrow & L_f X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta[n] \otimes B & \longrightarrow & *. \end{array}$$

D'aquesta manera podem obtenir una caracterització dels objectes f -locals.

Proposició 2.3.5. *Un objecte X de $\mathcal{C}$ és f -local si i només si l'aplicació $X \longrightarrow *$ té la propietat d'elevació a dreta respecte a les dues famílies de morfismes següents:*

i) $J = \{\text{conjunt de cofibracions trivials generadores}\}.$

ii) $I = \left\{ \Delta[n] \otimes A \coprod_{\partial\Delta[n] \otimes A} \partial\Delta[n] \otimes B \longrightarrow \Delta[n] \otimes B, n \geq 0 \right\}.$ □

Observeu que els elements de I són cofibracions. Donat un morfisme g en I , l'existència d'una elevació a esquerra de g respecte a qualsevol fibració trivial $X \longrightarrow Y$,

$$\begin{array}{ccc} \Delta[n] \otimes A \coprod_{\partial\Delta[n] \otimes A} \partial\Delta[n] \otimes B & \longrightarrow & X \\ g \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta[n] \otimes B & \longrightarrow & Y, \end{array}$$

és equivalent per la bijecció (2.1) a que existeixi una elevació en el següent diagrama de conjunts simplicials:

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta[n] & \longrightarrow & \text{Map}(B, X) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta[n] & \longrightarrow & \text{Map}(A, X) \times_{\text{Map}(A, Y)} \text{Map}(B, Y). \end{array}$$

Aquesta elevació sempre existeix ja que el morfisme de la dreta és una fibració trivial per (M7) i el morfisme $\partial\Delta[n] \longrightarrow \Delta[n]$ és una cofibració de conjunts simplicials.

Sigui $K = I \cup J$. Triem ara un cardinal λ tal que tots els dominis de morfismes del conjunt K siguin λ -petits (n'hi ha prou amb triar λ com el mínim cardinal que compleix que aquests dominis són λ -petits). Suposem que $K = \{A_i \longrightarrow B_i, i \in \mathcal{I}\}$. Sigui $E_0 = X$ i construïm el següent diagrama tipus *pushout*, on el coproducte varia sobre tots els possibles morfismes de A_i a E_0 per a cada $i \in \mathcal{I}$:

$$\begin{array}{ccc} \coprod A_i & \longrightarrow & E_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod B_i & \longrightarrow & E_1. \end{array}$$

D'aquesta manera obtenim l'objecte E_1 . Procedim ara inductivament; E_{n+1} s'obté a partir de E_n mitjançant el *pushout*

$$\begin{array}{ccc} \coprod A_i & \longrightarrow & E_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod B_i & \longrightarrow & E_{n+1}, \end{array}$$

on ara el coproducte varia sobre tots els possibles morfismes de A_i a E_n per a cada $i \in \mathcal{I}$. Si γ és un ordinal límit, llavors $E_\gamma = \text{colím}_{\beta < \gamma} E_\beta$. Tenim així una λ -successió

$$E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_\beta \longrightarrow \cdots \quad (\beta < \lambda)$$

i definim la localització

$$L_f X = \text{colím}_{\beta < \lambda} E_\beta.$$

La composició de la λ -successió $E_0 = X \longrightarrow L_f X = \text{colím}_{\beta < \lambda} E_\beta$ és l'aplicació de localització.

Cadascuna de les aplicacions $E_n \longrightarrow E_{n+1}$ és una cofibració, ja que és el *pushout* d'un coproducte de cofibracions. Tenim d'aquesta manera una λ -successió de cofibracions

$$X = E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_\beta \longrightarrow \cdots$$

la composició de la qual $X = E_0 \longrightarrow \text{colim}_{\beta < \lambda} E_\beta = L_f X$ és una cofibració.

En la construcció de $L_f X$ hem utilitzat el *small object argument* de Quillen, en el qual es realitzen successius *pushouts* i colímits. És, per tant, una construcció functorial. D'aquesta manera podem definir el functor de f -localització

$$L_f: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

que assigna a cada X l'objecte $L_f X$ construït anteriorment.

Per a completar la construcció de la f -localització ens falta comprovar que l'objecte $L_f X$ és, en efecte, f -local per a tot X i que l'aplicació $X \longrightarrow L_f X = \text{colim}_{\beta < \lambda} E_\beta$ és una f -equivalència.

Lema 2.3.6. *L'objecte $L_f X$ definit anteriorment és f -local.*

Demostració. Per la Proposició 2.3.5 n'hi ha prou amb comprovar que l'aplicació $L_f X \longrightarrow *$ té la propietat d'elevació a dreta respecte a tots els elements de la classe d'aplicacions K . Donada una aplicació $A_i \longrightarrow B_i$ de K , hem de veure que existeix l'elevació

$$\begin{array}{ccc} A_i & \longrightarrow & L_f X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ B_i & \longrightarrow & * \end{array} \quad (2.2)$$

Com que $L_f = \text{colim}_{\beta < \lambda} E_\beta$ i cada A_i és λ -petit, llavors l'aplicació natural

$$\text{colim}_{\beta < \lambda} \mathcal{C}(A_i, E_\beta) \longrightarrow \mathcal{C}(A_i, \text{colim}_{\beta < \lambda} E_\beta)$$

és una bijecció. Per tant, l'aplicació $A_i \longrightarrow L_f X$ factoritza a través de $E_\beta \longrightarrow L_f X$ per a algun $\beta < \lambda$ i tenim el següent diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc} A_i & \longrightarrow & L_f X \\ \downarrow & \searrow & \uparrow \\ B_i & \longrightarrow & E_\beta \end{array}$$

L'aplicació $B_i \longrightarrow E_\beta$ existeix per construcció dels E_β , i per composició amb l'aplicació $E_\beta \longrightarrow L_f X$, defineix l'elevació en el diagrama (2.2). $\square$

Totes les aplicacions de K són f -equivalències. Sigui g una aplicació de K . Si g pertany al conjunt J , llavors $g: A_i \longrightarrow B_i$ és una cofibració trivial. Denotem per $\tilde{g}: \tilde{A}_i \longrightarrow \tilde{B}_i$ una aproximació cofibrant de g . Podem triar $\tilde{g}$ de manera que sigui també una cofibració trivial [Hir03, Proposició 8.1.23]. Utilitzant ara l'axioma (M7), obtenim que l'aplicació natural

$$\text{Map}(\tilde{B}_i, X) \longrightarrow \text{Map}(\tilde{A}_i, X)$$

és una equivalència dèbil de conjunts simplicials per a tot objecte X que sigui fibrant, en particular per a tot X que sigui f -local, i així g és una f -equivalència. Si g pertany a la classe I , llavors és de la forma

$$g: A \otimes \Delta[n] \coprod_{A \otimes \partial\Delta[n]} B \otimes \partial\Delta[n] \longrightarrow B \otimes \Delta[n].$$

Les aplicacions $A \otimes \partial\Delta[n] \longrightarrow B \otimes \partial\Delta[n]$ i $A \otimes \Delta[n] \longrightarrow B \otimes \Delta[n]$ són ambdues f -equivalències ja que f és una cofibració entre objectes cofibrants i tant $\partial\Delta[n]$ com $\Delta[n]$ són conjunts simplicials cofibrants. El *pushout* d'una f -equivalència que és una cofibració entre objectes cofibrants torna a ser una f -equivalència ja que, per hipòtesi, la categoria $\mathcal{C}$ és pròpia per l'esquerra (veure [Hir03, Lema 3.2.10]). El següent diagrama tipus *pushout*

$$\begin{array}{ccc} A \otimes \partial\Delta[n] & \xrightarrow{\quad} & A \otimes \Delta[n] \\ f \otimes 1 \downarrow & & \downarrow \\ B \otimes \partial\Delta[n] & \xrightarrow{\quad} & A \otimes \Delta[n] \coprod_{A \otimes \partial\Delta[n]} B \otimes \partial\Delta[n] \\ & & \searrow g \\ & & B_i \end{array}$$

implica que l'aplicació g és també una f -equivalència ja que és una composició de f -equivalències.

Lema 2.3.7. *L'aplicació $X \longrightarrow L_f X$ és una f -equivalència.*

Demostració. Cada aplicació $E_\beta \longrightarrow E_{\beta+1}$ és una f -equivalència, ja que és el *pushout* d'una aplicació que és una cofibració i una f -equivalència i la categoria $\mathcal{C}$ és pròpia per l'esquerra (veure [Hir03, Lema 3.2.10]). Considerem ara la següent λ -successió de cofibracions i f -equivalències:

$$X = E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_\beta \longrightarrow \cdots$$

Per la Proposició 17.9.4 de [Hir03], podem trobar una altra λ -successió de cofibracions juntament amb una aplicació de λ -successions

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{E}_0 & \longrightarrow & \tilde{E}_1 & \longrightarrow & \tilde{E}_2 & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow \tilde{E}_\beta \longrightarrow \cdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ E_0 & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow E_\beta \longrightarrow \cdots \end{array}$$

tal que:

- i) Cada aplicació vertical $\tilde{E}_\beta \longrightarrow E_\beta$ és una aproximació cofibrant de E_β .
- ii) Cada aplicació $\tilde{E}_\beta \longrightarrow \tilde{E}_{\beta+1}$ és una cofibració.
- iii) L'aplicació $\text{colím}_{\beta < \lambda} \tilde{E}_\beta \longrightarrow \text{colím}_{\beta < \lambda} E_\beta$ és una aproximació cofibrant de $\text{colím}_{\beta < \lambda} E_\beta$.

Sigui Z un objecte f -local. Com que cada aplicació $E_\beta \longrightarrow E_{\beta+1}$ és una f -equivalència i cada $\tilde{E}_\beta \longrightarrow \tilde{E}_{\beta+1}$ és una cofibració, l'aplicació

$$\text{Map}(\tilde{E}_{\beta+1}, Z) \longrightarrow \text{Map}(\tilde{E}_\beta, Z)$$

és una fibració trivial. D'aquesta manera,

$$\text{Map}(\tilde{E}_0, Z) \longleftarrow \text{Map}(\tilde{E}_1, Z) \longleftarrow \cdots \longleftarrow \text{Map}(\tilde{E}_\beta, Z) \longleftarrow \cdots$$

és una torre de fibracions trivials de conjunts simplicials. Per tant la composició

$$\text{Map}(\text{colím}_{\beta < \lambda} \tilde{E}_\beta, Z) \longrightarrow \lim_{\beta < \lambda} \text{Map}(\tilde{E}_\beta, Z) \longrightarrow \text{Map}(\tilde{E}_0, Z)$$

és una equivalència dèbil i l'aplicació $X \longrightarrow L_f X = \text{colím}_{\beta < \lambda} E_\beta$ és una f -equivalència. $\square$

Partint d'una categoria de models simplicial, hem construït a partir d'una cofibració $f: A \longrightarrow B$ entre objectes cofibrants un functor L_f que assigna a cada objecte X de $\mathcal{C}$ una f -localització $l_X: X \longrightarrow L_f X$.

El següent teorema recull les hipòtesis sobre la categoria $\mathcal{C}$ per a l'existència de functors de f -localització per a qualsevol aplicació f .

Teorema 2.3.8. *Sigui $\mathcal{C}$ una categoria de models simplicial, cofibrantment generada i localment presentable, i sigui $f: A \longrightarrow B$ una cofibració entre objectes cofibrants. Llavors existeix un functor de f -localització en $\mathcal{C}$.*

$\square$

La hipòtesi que f sigui una cofibració pot afeblir-se partint del fet que si f no és cofibració, es comença aproximant-la per una cofibració. Les condicions del teorema anterior són satisfetes per les categories de conjunts simplicials o espectres simètrics entre d'altres.

L'existència del functor de f -localització permet definir noves estructures de models en la categoria $\mathcal{C}$. Si definim ara les equivalències dèbils com les aplicacions g tals que $L_f g$ és una equivalència dèbil i mantenim les cofibracions, tenim una nova estructura de models en $\mathcal{C}$, que es denota per $L_f \mathcal{C}$ i es diu *estructura de models localitzada*. Utilitzant l'aplicació de f -localització podem obtenir una factorització functorial de l'aplicació $X \rightarrow *$ com una fibració trivial seguida d'una cofibració:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & * \\ & \searrow l_X & \nearrow \\ & L_f X & \end{array}$$

$\sim$

Recordeu que $L_f X$ és fibrant i l'aplicació l_X és una cofibració. Utilitzant el *small object argument* de manera anàloga a la construcció de $L_f X$, podem construir un functor CW_f juntament amb una transformació natural $c: CW_f \rightarrow \text{Id}$ que pren valors cofibrants i tal que, per a tot X , l'aplicació $c_X: CW_f X \rightarrow X$ és una fibració. Això ens permet aconseguir una factorització functorial de l'aplicació $\emptyset \rightarrow X$ com una cofibració trivial seguida d'una fibració:

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \xrightarrow{\quad} & X \\ & \searrow & \nearrow c_X \\ & CW_f X & \end{array}$$

$\sim$

D'aquesta manera, cada aplicació f proporciona una nova estructura de models en $\mathcal{C}$. Donat un objecte X , les aplicacions l_X i c_X corresponen respectivament a una aproximació fibrant i a una aproximació cofibrant de X en la categoria de models localitzada.

Aquest resultat es compleix també en categories de models cel·lulars en el sentit de [Hir03, Definició 12.1.1]. El Teorema 4.1.1 de [Hir03] demostra l'existència de f -localitzacions en aquest tipus de categories.

Capítol 3

Functors de localització en homotopia estable

En aquest capítol descriurem quines són les principals propietats dels functors de localització en la categoria homotòpica dels espectres. En el Capítol 2 es demostra com construir la f -localització en una categoria $\mathcal{C}$ per a qualsevol aplicació f i qualsevol objecte X , sempre que $\mathcal{C}$ sigui una categoria de models simplicial que verifiqui certes hipòtesis addicionals, que apareixen en el Teorema 2.3.8. Aquestes hipòtesis inclouen que la categoria sigui pròpia per l'esquerra, cofibrantment generada i localment presentable.

Per a construir functors de localització en la categoria homotòpica estable, prenem com a base la categoria d'espectres simètrics sobre conjunts simplicials [HSS00] o la categoria de Bousfield–Friedlander [BF78]. Ambdues categories satisfan les condicions del Teorema 2.3.8 anteriorment esmentades. Les categories homotòpiques associades a aquestes categories de models són equivalents a la categoria homotòpica estable d'Adams–Boardman.

3.1 Espectres de funcions

En la categoria d'espectres simètrics, donats dos espectres X i Y tals que X és cofibrant i Y és fibrant, el conjunt simplicial $\mathrm{Map}(X, Y)$ és un espai de llaços infinit, i per a qualsevol elecció de punt base, els seus grups d'homotopia verifiquen que

$$\pi_k(\mathrm{Map}(X, Y), *) \cong [\Sigma^k X, Y] \cong \pi_k(F(X, Y)) \quad \text{per a } k \geq 0,$$

on $F(X, Y)$ és l'espectre de funcions de X a Y , obtingut per representabilitat de Brown a partir del functor $[- \wedge X, Y]$. El functor $F(X, -)$ és un adjunt per la dreta del functor $X \wedge -$, per tant per a tot X, Y, Z es compleix que $[X \wedge Y, Z] \cong [X, F(Y, Z)]$. Els grups d'homotopia del conjunt simplicial $\text{Map}(X, Y)$ són isomorfs als del recubridor connectiu $F^c(X, Y)$ de l'espectre de funcions de X a Y , que utilitzarem per a definir la localització. El *recubridor connectiu* X^c d'un espectre X és un espectre (-1) -connex que té els mateixos grups d'homotopia que X en dimensió major o igual que zero, és a dir,

$$\pi_k(X^c) = \begin{cases} \pi_i(X) & \text{si } i \geq 0 \\ 0 & \text{si } i < 0 \end{cases}$$

A partir d'ara treballarem amb espectres de funcions (derivats) en la categoria homotòpica estable, que denotarem per Ho^s , sense fer cap referència a la categoria de models escollida.

Definició 3.1.1. Sigui $f: A \longrightarrow B$ una aplicació d'espectres.

- Un espectre X es diu *f-local* si l'aplicació f indueix una equivalència homotòpica $F^c(B, X) \simeq F^c(A, X)$, on $F^c(-, -)$ és el recubridor connectiu de l'espectre de funcions.
- Una aplicació $g: X \longrightarrow Y$ és una *f-equivalència* si g indueix una equivalència homotòpica $F^c(Y, Z) \simeq F^c(X, Z)$ per a tot espectre Z que sigui *f-local*.
- Una *f-localització* d'un espectre X és una aplicació $l_X: X \longrightarrow L_f X$ tal que l_X és una *f-equivalència* i $L_f X$ és un espectre *f-local*.

Per a cada aplicació f , cada espectre X té associada una *f-localització* $L_f X$, i aquesta associació que a cada X li fa correspondre $L_f X$ es construeix com un functor homotòpic en la categoria dels espectres, com s'explica en la Secció 2.3 del Capítol 2.

L'aplicació de localització $l_X: X \longrightarrow L_f X$ té dues propietats universals en Ho^s que la caracteritzen:

- i) L'aplicació $l_X: X \longrightarrow L_f X$ és *inicial* entre totes les aplicacions de X a espectres *f-locales*, és a dir, si $g: X \longrightarrow Y$ és una aplicació d'espectres on

Y és f -local, llavors existeix una única aplicació $h: L_f X \longrightarrow Y$ tal que $g \simeq h \circ l_X$,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{l_X} & L_f X \\ g \downarrow & \nearrow h & \\ Y & & \end{array}$$

- ii) L'aplicació $l_X: X \longrightarrow L_f X$ és *final* entre totes les f -equivalències amb domini X , és a dir, si $g: X \longrightarrow Y$ és una f -equivalència, llavors existeix una única aplicació $h: Y \longrightarrow L_f X$ tal que $l_X \simeq h \circ g$,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{l_X} & L_f X \\ g \downarrow & \nearrow h & \\ Y & & \end{array}$$

Per demostrar la primera de les propietats prenem Y un espectre f -local. Llavors, utilitzant que l_X és una f -equivalència, tenim

$$\begin{aligned} [X, Y] &\cong \pi_0(F(X, Y)) \cong \pi_0(F^c(X, Y)) \cong \pi_0(F^c(L_f X, Y)) \\ &\cong \pi_0(F(L_f X, Y)) \cong [L_f X, Y]. \end{aligned}$$

La segona es demostra anàlogament. Si $g: X \longrightarrow Y$ és una f -equivalència, llavors

$$\begin{aligned} [X, L_f X] &\cong \pi_0(F(X, L_f X)) \cong \pi_0(F^c(X, L_f X)) \cong \pi_0(F^c(Y, L_f X)) \\ &\cong \pi_0(F(Y, L_f X)) \cong [Y, L_f X]. \end{aligned}$$

Qualsevol d'aquestes dues propietats universals ens garanteix que si tenim un espectre Y que és f -local i una aplicació $X \longrightarrow Y$ que és una f -equivalència, llavors $Y \simeq L_f X$.

Corol·lari 3.1.2. *Per a una aplicació f donada, el functor de localització L_f és únic llevat d'homotopia.* $\square$

Els espectres X que són f -locals són precisament aquells que compleixen que $X \simeq L_f X$. En efecte, si X és f -local, aplicant la primera de les propietats

universals a l'aplicació identitat en X , obtenim que existeix una única aplicació $h: L_f X \longrightarrow X$ tal que $h \circ l_X \simeq 1_X$,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{l_X} & L_f X \\ \parallel & \searrow h & \\ X & & \end{array}$$

Utilitzant un raonament anàleg es prova que les aplicacions $X \longrightarrow Y$ tals que $L_f X \longrightarrow L_f Y$ és una equivalència homotòpica són exactament les f -equivalències. Si $g: X \longrightarrow Y$ és una f -equivalència, la composició $l_Y \circ g$ és una f -equivalència. Fent servir ara la segona de les propietats universals de la localització, existeix una única aplicació $h: L_f Y \longrightarrow L_f X$ tal que $h \circ l_Y \circ g \simeq l_X$,

$$\begin{array}{ccc} Xg & \xrightarrow{l_X} & L_f X \\ \downarrow & & \uparrow h \\ I & \xrightarrow{l_Y} & L_f Y. \end{array}$$

Els espectres f -locals o les aplicacions que són f -equivalències caracteritzen els functors de localització en el sentit que donats dos functors L_f i L_g , ambdós coincideixen si i només si la classe d'espectres f -locals coincideix amb la classe d'espectres g -locals, o bé, la classe de f -equivalències coincideix amb la de g -equivalències. Quan diem que L_f i L_g coincideixen significa que $L_f X \simeq L_g X$ per a tot espectre X .

Un functor *idempotent* en una categoria $\mathcal{C}$ és un endofunctor L juntament amb una transformació natural $l: \text{Id} \longrightarrow L$ tal que $Ll = lL$ i $Ll: L \longrightarrow L^2$ és un isomorfisme.

Proposició 3.1.3. *El functor de localització L_f és idempotent en la categoria homotòpica estable.*

Demostració. L'aplicació de localització $l_X: X \longrightarrow L_f X$ defineix una transformació natural $l: \text{Id} \longrightarrow L_f$. Per tant, el següent diagrama commuta llevat d'homotopia per naturalitat

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{l_X} & L_f X \\ l_X \downarrow & & \downarrow L_f l_X \\ L_f X & \xrightarrow{l_{L_f X}} & L_f L_f X, \end{array}$$

és a dir, $l_{L_f X} \circ l_X \simeq L_f l_X \circ l_X$ per a cada espectre X . Utilitzant la propietat universal de la localització, tenim que això implica que $l_{L_f X} \simeq L_f l_X$. Per a cada espectre X , agafem ara l'aplicació identitat en $L_f X$ i sigui μ_X l'única aplicació que tanca el diagrama

$$\begin{array}{ccc} L_f X & \xrightarrow{l_{L_f X}} & L_f L_f X \\ \downarrow 1 & \nearrow \mu_X & \\ L_f X & & \end{array}$$

Tenim que $\mu_X \circ l_{L_f X}$ és la identitat en $L_f X$. De la propietat universal de la localització també es dedueix que $l_{L_f X} \circ \mu_X$ és la identitat en $L_f L_f X$. Així doncs, $l_{L_f X}$ és un isomorfisme en la categoria homotòpica dels espectres i per tant el functor L_f és idempotent. $\square$

3.2 Propietats dels functors de localització

El functor suspensió juga un paper fonamental en la teoria d'homotopia estable. També és un functor important en la teoria de f -localització d'espectres. En aquesta secció estudiarem de quina manera i en quins casos la localització $L_f X$ d'un espectre determina o pot ser determinada per la de les seves suspensions $L_f \Sigma^k X$ amb $k \in \mathbb{Z}$. En general no té perquè haver cap relació entre aquestes localitzacions; de fet, els espectres f -locals i les f -equivalències no són tancats per suspensions i desuspensions arbitràries en general.

Proposició 3.2.1. *Sigui $f: A \longrightarrow B$ una aplicació d'espectres. Siguin $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ i $E \rightarrow F \rightarrow G$ dues cofibracions d'espectres i siguin i, g, i h aplicacions tals que fant el diagrama següent commutatiu:*

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z \\ g \downarrow & & h \downarrow & & \downarrow i \\ E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G \end{array}$$

Llavors:

- i) *Si Y i Z són f -locals, també ho és X .*
- ii) *Si g i h són f -equivalències, també ho és i .*

Demostració. N'hi ha prou amb aplicar les definicions i utilitzar la successió exacta llarga associada a cada cofibració d'espectres. En el cas del primer apartat, la cofibració $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ dóna lloc al següent diagrama de grups abelians

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & [\Sigma B, Y] & \longrightarrow & [\Sigma B, Z] & \longrightarrow & [B, X] & \longrightarrow & [B, Y] & \longrightarrow & [B, Z] \\ & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & [\Sigma A, Y] & \longrightarrow & [\Sigma A, Z] & \longrightarrow & [A, X] & \longrightarrow & [A, Y] & \longrightarrow & [A, Z] \end{array}$$

Com que Y i Z són f -locals per hipòtesi, el lema dels cinc implica que hi ha un isomorfisme $[\Sigma^k B, X] \cong [\Sigma^k A, X]$ per a tot $k \geq 0$, per tant $F^c(B, X) \simeq F^c(A, X)$ i així, X és f -local. Per a demostrar la segona part, sigui ara C un espectre f -local. Les successions exactes associades a les cofibracions $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ i $E \rightarrow F \rightarrow G$ donen lloc al següent diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} [X, C] & \longleftarrow & [Y, C] & \longleftarrow & [Z, C] & \longleftarrow & [\Sigma X, C] & \longleftarrow & [\Sigma Y, C] & \longleftarrow & \cdots \\ \cong \uparrow & & \cong \uparrow & & \uparrow & & \cong \uparrow & & \cong \uparrow & & \\ [E, C] & \longleftarrow & [F, C] & \longleftarrow & [G, C] & \longleftarrow & [\Sigma E, C] & \longleftarrow & [\Sigma F, C] & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

Com que g i h són f -equivalències, aplicant de nou el lema dels cinc, tenim un isomorfisme $[\Sigma^k Z, C] \cong [\Sigma^k G, C]$ per a tot $k \geq 0$. Això ens dóna una equivalència $F^c(Z, C) \simeq F^c(G, C)$ per a tot C que sigui f -local, i per tant i és una f -equivalència. $\square$

Observació 3.2.2. Aquesta proposició es pot veure com un cas particular del Lema 2.3.3. La fibra homotòpica d'una aplicació és un cas particular de límit homotòpic, i l'aplicació del segon apartat és un colímit homotòpic de f -equivalències.

Corol·lari 3.2.3. *Si f és una aplicació d'espectres*

- i) *Si Y és un espectre f -local, llavors també ho és l'espectre $\Sigma^{-k}Y$ per a $k \geq 0$.*
- ii) *Si $g: X \rightarrow Y$ és una f -equivalència, també ho és $\Sigma^k g$ per a $k \geq 0$.*

Demostració. Si Y és f -local, podem aplicar el primer apartat de la Proposició 3.2.1 a la cofibració

$$\Sigma^{-1}Y \longrightarrow * \longrightarrow Y.$$

D'aquesta manera obtenim que $\Sigma^{-1}Y$ és f -local. Podem reiterar ara el procés i d'aquesta manera veiem que $\Sigma^{-k}Y$ és f -local per a tot $k \geq 0$. En el cas que g sigui una f -equivalència, basta aplicar el segon apartat de la Proposició 3.2.1 al diagrama de cofibracions

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & * & \longrightarrow & \Sigma X \\ g \downarrow & & \downarrow & & \Sigma g \downarrow \\ Y & \longrightarrow & * & \longrightarrow & \Sigma Y \end{array}$$

per obtenir que Σg és una f -equivalència. Reiterant el procés tenim que $\Sigma^k g$ és una f -equivalència per a tot $k \geq 0$. $\square$

Degut al fet que $F^c(B, Y) \simeq F^c(\Sigma^k B, \Sigma^k Y)$ per a tot B, Y i $k \in \mathbb{Z}$, podem concloure que si Y és un espectre f -local, llavors $\Sigma^k Y$ és $\Sigma^k f$ -local per a tot $k \in \mathbb{Z}$ i el mateix succeeix per a f -equivalències, és a dir, si g és una f -equivalència, llavors $\Sigma^k g$ és una $\Sigma^k f$ -equivalència per a tot $k \in \mathbb{Z}$. A partir d'aquest fet podem deduir el següent resultat.

Proposició 3.2.4. *Per a qualsevol aplicació d'espectres f i qualsevol espectre X tenim una equivalència homotòpica*

$$L_f \Sigma^{-k} X \simeq \Sigma^{-k} L_{\Sigma^k f} X,$$

per a tot $k \in \mathbb{Z}$

Demostració. L'aplicació de localització $l: X \longrightarrow L_{\Sigma^k f} X$ és una $\Sigma^k f$ -equivalència, per tant $\Sigma^{-k} l$ és una f -equivalència. A més a més, $\Sigma^{-k} L_{\Sigma^k f} X$ és f -local ja que $L_{\Sigma^k f} X$ és $\Sigma^k f$ -local. El resultat és conseqüència del Corol·lari 3.1.2. $\square$

Proposició 3.2.5. *Si $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ una cofibració d'espectres, i sigui L_f un functor de localització qualsevol. Si $L_f X$ és contràctil, llavors l'aplicació $Y \longrightarrow Z$ és una f -equivalència.*

Demostració. Considerem la successió exacta llarga de grups abelians

$$\cdots \longrightarrow [\Sigma X, E] \longrightarrow [Z, E] \longrightarrow [Y, E] \longrightarrow [X, E] \longrightarrow \cdots$$

associada a la cofibració per a qualsevol espectre E . Si E és f -local, llavors $[\Sigma^k X, E] = 0$ per a tot $k \geq 0$, per la segona part del Corol·lari 3.2.3, ja que com que $L_f X$ és contràctil, l'aplicació $X \longrightarrow *$ és una f -equivalència. Així doncs, $[\Sigma^k Z, E] \cong [\Sigma^k Y, E]$ per a tot $k \geq 0$ i per a tot espectre Y que sigui f -local, i això implica que $Y \longrightarrow Z$ és una f -equivalència. $\square$

El functor de localització és un functor additiu en Ho^s . Donats dos espectres qualssevol X i Y , tenim una equivalència natural

$$L_f X \vee L_f Y \simeq L_f(X \vee Y),$$

ja que el coproducte $l_X \vee l_Y: X \vee Y \longrightarrow L_f X \vee L_f Y$ és una f -equivalència i $L_f X \vee L_f Y$ és un producte d'espectres f -locals i, per tant, f -local.

Com a conseqüència del Corol·lari 3.2.3, per a qualsevol aplicació f i qualsevol espectre X tenim una aplicació natural

$$\Sigma L_f X \longrightarrow L_f \Sigma X. \quad (3.1)$$

Quan aquesta aplicació natural és una equivalència homotòpica diem que el functor L_f *commuta amb la suspensió*. Així doncs, el functor L_f commuta amb la suspensió si i només si $\Sigma L_f X \simeq L_f \Sigma X$, ja que en aquest cas $\Sigma L_f X$ és f -local, i llavors l'aplicació (3.1) és una f -equivalència entre espectres f -locals.

Treballar amb functors de localització que commuten amb la suspensió té els seus avantatges respecte als que no tenen aquesta propietat. Per a aquesta classe de functors els espectres f -locals i les f -equivalències sí que estan tancades per suspensions i desuspensions arbitràries, i a més a més preserven cofibracions d'espectres.

Teorema 3.2.6. *Sigui $f: A \longrightarrow B$ una aplicació d'espectres. Són equivalents:*

- i) $\Sigma L_f X \simeq L_f \Sigma X$ per a tot espectre X .
- ii) $\Sigma^k L_f X \simeq L_f \Sigma^k X$ per a tot espectre X i tot $k \in \mathbb{Z}$.
- iii) Si E és un espectre f -local, llavors $\Sigma^k E$ també és f -local per a tot $k \in \mathbb{Z}$.
- iv) Si g és una f -equivalència, llavors $\Sigma^k g$ és també una f -equivalència per a tot $k \in \mathbb{Z}$.

- v) $L_f X \simeq L_{\Sigma^k f} X$ per a tot espectre X i tot $k \in \mathbb{Z}$.
- vi) L'aplicació $F(B, E) \longrightarrow F(A, E)$ induïda per f és una equivalència homotòpica per a tot espectre f -local E .
- vii) Si E és f -local i X és qualsevol espectre, llavors $F(X, E)$ és f -local.
- viii) Si $g: X \longrightarrow Y$ i $h: M \longrightarrow N$ són f -equivalències arbitràries, llavors l'aplicació $g \wedge h: X \wedge M \longrightarrow Y \wedge N$ també és una f -equivalència.
- ix) Si $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ és una cofibració d'espectres, llavors $L_f X \rightarrow L_f Y \rightarrow L_f Z$ també és una cofibració d'espectres.

Demostració. Els enunciats i) i ii) són equivalents i ii) implica iii). Observar que iii) implica que $\Sigma L_f X$ és f -local per a tot X i per tant es compleix i) ja que (3.1) és una f -equivalència. Utilitzant les definicions es pot veure directament que iii) i iv) són equivalents. A partir de iv) es dedueix que per a qualsevol $k \in \mathbb{Z}$, l'aplicació $\Sigma^k f$ és una f -equivalència i f és una $\Sigma^k f$ -equivalència. Això ens diu que la classe d'espectres f -locals i la classe d'espectres $\Sigma^k f$ -locals coincideix, la qual cosa implica v). Ara, v) juntament amb la Proposició 3.2.4 implica ii). L'enunciat vi) és equivalent a afirmar que f indueix una equivalència

$$F^c(B, \Sigma^k E) \simeq F^c(A, \Sigma^k E)$$

per a tot $k \in \mathbb{Z}$, i per tant es dedueix a partir de iii). Per demostrar vii), hem de comprovar que

$$F^c(B, F(X, E)) \simeq F^c(A, F(X, E)),$$

la qual cosa és equivalent a que $F^c(X, F(B, E)) \simeq F^c(X, F(A, E))$, i això es dedueix de vi). L'apartat viii) es demostra a partir de vii) prenent un espectre f -local E qualsevol i observant que

$$\begin{aligned} F^c(Y \wedge N, E) &\simeq F^c(Y, F(N, E)) \simeq F^c(X, F(N, E)) \\ &\simeq F^c(N, F(X, E)) \simeq F^c(M, F(X, E)) \simeq F^c(X \wedge M, E). \end{aligned}$$

Ara, iv) es dedueix a partir de viii) fent el producte *smash* de g amb la identitat en $\Sigma^k S$, per a $k \in \mathbb{Z}$. Tenim per tant que els apartats i) a viii) són tots equivalents entre si.

Per obtenir ix) a partir de i), donada una cofibració $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$, considerem el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} \Sigma^{-1}Z & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & \Sigma X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ L_f \Sigma^{-1}Z & \longrightarrow & L_f X & \longrightarrow & C & \longrightarrow & \Sigma L_f \Sigma^{-1}Z & \longrightarrow & \Sigma L_f X, \end{array}$$

on C és la cofibra de l'aplicació $L_f \Sigma^{-1}Z \longrightarrow L_f X$. Aplicant i) tenim que $\Sigma L_f \Sigma^{-1}Z \simeq L_f Z$ i $\Sigma L_f X \simeq L_f \Sigma X$. Així doncs, totes les aplicacions verticals excepte potser $Y \longrightarrow C$ són f -equivalències. El lema dels cinc implica que $Y \longrightarrow C$ és també una f -equivalència i C és f -local. Per tant $C \simeq L_f Y$. Finalment, per a veure que ix) implica i) utilitzem la cofibració $X \longrightarrow * \longrightarrow \Sigma X$, per a cada X . $\square$

Observació 3.2.7. Encara que nosaltres ens centrem en l'estudi de functors de f -localització en la categoria homotòpica estable, el teorema anterior té una aplicació més general. L'equivalència entre els apartats i) a vi) és vàlida per a qualsevol functor exacte en una categoria triangulada $\mathcal{C}$, substituint $F(X, Y)$ pel conjunt de morfismes $\mathcal{C}(X, Y)$ entre X i Y en $\mathcal{C}$. La resta dels apartats utilitzen per a la seva demostració propietats del producte *smash* d'espectres, pròpies de la categoria estable.

Hem vist que només els functors que commuten amb la suspensió preserven qualsevol cofibració d'espectres. Donat un functor de localització qualsevol i una cofibració, podem obtenir una altra cofibració localitzant únicament la fibra. Aquesta construcció que descriurem a continuació rep el nom de *localització fibra a fibra*.

Proposició 3.2.8. *Si $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ és una cofibració d'espectres, llavors existeix una altra cofibració d'espectres $L_f X \longrightarrow \bar{Y} \longrightarrow Z$ i una aplicació $Y \longrightarrow \bar{Y}$ que és una f -equivalència.*

Demostració. Tenim el següent diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma^{-1}Z & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z \\ \parallel & & \downarrow \iota_X & & & & \parallel \\ \Sigma^{-1}Z & \longrightarrow & L_f X & & & & Z. \end{array}$$

Sigui $\bar{Y}$ la cofibra de la composició $\Sigma^{-1}Z \longrightarrow X \xrightarrow{l_X} L_f X$. L'aplicació induïda $Y \longrightarrow \bar{Y}$ és una f -equivalència pel segon apartat de la Proposició 3.2.1. $\square$

També és possible combinar la localització fibra a fibra amb la localització respecte a la suspensió d'una aplicació.

Proposició 3.2.9. *Si $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ és una cofibració d'espectres, llavors existeix una altra cofibració d'espectres $L_f X \longrightarrow \bar{Y} \longrightarrow L_{\Sigma f} Z$ i una aplicació $Y \longrightarrow \bar{Y}$ que és una f -equivalència.*

Demostració. Tenim ara el següent diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma^{-1}Z & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z \\ \downarrow l_{\Sigma^{-1}Z} & & \downarrow l_X & & & & \downarrow l_Z \\ L_f \Sigma^{-1}Z & \longrightarrow & L_f X & & & & L_{\Sigma f} Z, \end{array}$$

i definim $\bar{Y}$ com la cofibra de $L_f \Sigma^{-1}Z \longrightarrow L_f X$. Tenim així definida una aplicació $Y \longrightarrow \bar{Y}$ que és una f -equivalència pel segon apartat de la Proposició 3.2.1. $\square$

Direm que un functor de f -localització és *quasi-exacte* si donada una cofibració d'espectres $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ en la qual X i Z són f -locals, llavors Y també ho és. Aquesta classe de functors té millors propietats de conservació de cofibracions.

Proposició 3.2.10. *Sigui $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ una cofibració d'espectres on Z és f -local. Si el functor L_f és quasi-exacte, llavors L_f preserva la cofibració.*

Demostració. Aplicant localització fibra a fibra (Proposició 3.2.8) a la cofibració $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ i utilitzant que L_f és quasi-exacte, tenim que $\bar{Y}$ és f -local, ja que Z ho és per hipòtesi. Per tant $L_f Y \simeq \bar{Y}$, i el functor L_f conserva la cofibració. $\square$

3.3 Nul·lificacions

Un cas particular important de f -localitzacions és aquell en el qual l'aplicació f és de la forma $f: A \longrightarrow *$. A aquestes f -localitzacions se'ls anomena

nul·lificacions. En aquests casos el functor L_f es denota per P_A i s'anomena functor de A -nul·lificació. Els espectres locals corresponents es diuen A -nuls i les f -equivalències reben el nom de P_A -equivalències.

Definició 3.3.1. Sigui A un espectre qualsevol.

- i) Un espectre X es diu A -nul si $F^c(A, X) \simeq *$.
- ii) Una aplicació $g: X \longrightarrow Y$ és una P_A -equivalència si g indueix una equivalència homotòpica $F^c(Y, Z) \simeq F^c(X, Z)$ per a tot espectre Z que sigui A -nul.

Un cas especial de nul·lificacions es dóna quan localitzem respecte a l'aplicació $f: \Sigma^k S \longrightarrow *$, on S és l'espectre de les esferes i $k \in \mathbb{Z}$. En aquest cas $P_{\Sigma^{k+1}S} E \simeq E_{(k)}$, on $E_{(k)}$ és la k -èsima secció de Postnikov de E , és a dir, $\pi_i(E_{(k)}) = 0$ per a $i > k$ i tenim una aplicació $E \longrightarrow E_{(k)}$ que indueix isomorfismes en els grups d'homotopia de dimensió menor o igual que k (veure Definició 1.2.11). Els espectres connectius es poden veure llavors com els espectres E tals que $P_S E = 0$. Aquesta caracterització ens permet demostrar el següent resultat:

Proposició 3.3.2. Si $f: A \longrightarrow B$ és una aplicació d'espectres amb A i B connectius, llavors el functor de localització no canvia els grups d'homotopia en dimensions negatives. En particular, si E és connectiu, llavors $L_f E$ també ho és.

Demostració. Si A i B són connectius, llavors $f: A \longrightarrow B$ és una P_S -equivalència, ja que $P_S f = 0$. Per tant, $F^c(B, Z) \simeq F^c(A, Z)$ per a tot espectre Z que sigui S -nul. Això implica que tot espectre S -nul és f -local i així, tota f -equivalència és també una P_S -equivalència. En particular, l'aplicació de localització és una P_S -equivalència. $\square$

Per a qualsevol functor de f -localització, donada una aplicació entre espectres f -locals, hem vist en la Proposició 3.2.1 que la fibra d'aquesta aplicació també és f -local. En el cas dels functors de nul·lificació es compleix a més a més que són quasi-exactes.

Lema 3.3.3. Sigui P_A el functor de A -nul·lificació i sigui $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ una cofibració d'espectres. Si X i Z són A -nuls, llavors Y també és A -nul.

Demostració. Tenim associada a la cofibració una successió exacta

$$\cdots \longrightarrow [\Sigma A, Y] \longrightarrow [\Sigma A, Z] \longrightarrow [A, X] \longrightarrow [A, Y] \longrightarrow [A, Z] \longrightarrow \cdots$$

Com que X i Z són A -nuls, $[\Sigma^k A, X] \cong [\Sigma^k A, Z] = 0$ per a tot $k \geq 0$, per tant $[\Sigma^k A, Y] = 0$ per a tot $k \geq 0$. $\square$

Existeix una estreta relació entre un functor de f -localització i la nul·lificació respecte a la cofibra de f . Si $f: A \longrightarrow B$ és una aplicació d'espectres i C és la cofibra de f , sempre hi ha una transformació natural de functors

$$P_C \longrightarrow L_f$$

ja que tot espectre que és f -local és C -nul. De la mateixa manera, hi ha transformacions naturals de functors

$$L_{\Sigma f} \longrightarrow P_C \quad \text{i} \quad L_f \longrightarrow P_{\Sigma^{-1}C}$$

ja que tot espectre C -nul és Σf -local i tot espectre $\Sigma^{-1}C$ -nul és f -local respectivament. D'aquesta manera tenim associada una torre de functors de localització

$$\cdots \rightarrow P_{\Sigma C} \rightarrow L_{\Sigma f} \rightarrow P_C \rightarrow L_f \rightarrow P_{\Sigma^{-1}C} \rightarrow L_{\Sigma^{-1}f} \rightarrow P_{\Sigma^{-1}C} \rightarrow \cdots \quad (3.2)$$

que convergeix per l'esquerra al functor identitat. Aquesta torre de localitzacions és similar a la que apareix en [CR97] en el cas d'espais topològics.

Aquesta petita diferència entre f -localització i nul·lificació desapareix quan el functor L_f commuta amb la suspensió. De fet, un functor de f -localització que commuta amb la suspensió és un functor de nul·lificació.

Proposició 3.3.4. *Si el functor de localització L_f commuta amb la suspensió, llavors l'aplicació natural $P_C X \longrightarrow L_f X$, on C és la cofibra de f , és una equivalència homotòpica per a tot espectre X .*

Demostració. Tenim transformacions naturals $L_{\Sigma f} \longrightarrow P_C \longrightarrow L_f$ que corresponen a les respectives inclusions de classes d'espectres locals. Com que la composició $L_{\Sigma f} \longrightarrow L_f$ és una equivalència per l'apartat v) del Teorema 3.2.6, també ho és l'aplicació $P_C X \longrightarrow L_f X$, per a tot espectre X . $\square$

Proposició 3.3.5. *El functor de localització L_f commuta amb la suspensió si i només si el functor de nul·lificació P_C , on C és la cofibra de f , commuta amb la suspensió.*

Demostració. Si $X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow C$ és una cofibració d'espectres llavors

$$F(X, E) \longleftarrow F(Y, E) \longleftarrow F(C, E)$$

és una altra cofibració d'espectres per a tot espectre E . Aquesta nova cofibració dóna lloc a una successió exacta llarga de grups d'homotopia

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(F(Y, E)) &\longrightarrow \pi_{n+1}(F(X, E)) \longrightarrow \pi_n(F(C, E)) \\ &\longrightarrow \pi_n(F(Y, E)) \longrightarrow \pi_n(F(X, E)) \longrightarrow \pi_{n-1}(F(C, E)) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Per l'apartat vi) del Teorema 3.2.6, el functor L_f commuta amb la suspensió si i només si $F(Y, E) \simeq F(X, E)$ per a tot espectre E que sigui f -local. Fent servir la successió exacta d'homotopia, obtenim que $\pi_n(F(C, E)) = 0$ per a tot $n \in \mathbb{Z}$. Això és equivalent a que $F(C, E) \simeq *$ i això succeeix si i només si el functor P_C commuta amb la suspensió, utilitzant de nou l'apartat vi) del Teorema 3.2.6. $\square$

Com ja hem vist, tot functor L_f que commuta amb la suspensió és un functor de nul·lificació respecte a la cofibra de f , però no tots els functors de nul·lificació commuten amb la suspensió. Les seccions de Postnikov, és a dir, els functors de nul·lificació $P_{\Sigma^k S}$, són un exemple de functors de localització que no commuten amb la suspensió; de fet, donat $k \in \mathbb{Z}$, si $\pi_k(E) \neq 0$, llavors $P_{\Sigma^{k+1} S} \Sigma E \not\simeq \Sigma P_{\Sigma^{k+1} S} E$.

No obstant això, els functors de nul·lificació tenen millors propietats de conservació de cofibracions que un functor de f -localització qualsevol.

Corol·lari 3.3.6. *Sigui $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ una cofibració d'espectres i sigui P_A el functor de A -nul·lificació. Si Z és A -nul, llavors el functor P_A preserva la cofibració.*

Demostració. Els functors de nul·lificació són quasi-exactes, pel Lema 3.3.3. N'hi ha prou amb aplicar ara la Proposició 3.2.10. $\square$

3.4 Localitzacions en conjunts de primers

La teoria de localització en conjunts de primers en les categories d'espais topològics i grups, ha estat àmpliament estudiada durant la dècada dels anys 70 [BK72a], [HMR75]. Donat un conjunt de nombres primers P (que pot ser buit), un espai simplement connex es diu que és P -local si tots els seus grups d'homotopia són $\mathbb{Z}_P$ -mòduls, on $\mathbb{Z}_P$ denota l'anell dels enters localitzats en P , això és, $\mathbb{Z}_P$ és el subanell de $\mathbb{Q}$ que conté a $\mathbb{Z}$ i en el qual són invertibles tots els primers que no pertanyen a P . Per a cada espai simplement connex X , existeix una aplicació única llevat d'homotopia $X \longrightarrow X_P$, que indueix un isomorfisme natural

$$\pi_k(X) \longrightarrow \pi_k(X) \otimes \mathbb{Z}_P$$

per a tot $k \geq 1$. L'espai X_P és la localització de X en el conjunt de primers P , també anomenada P -localització de X .

En la categoria de grups abelians, la P -localització d'un grup abelià G ve definida per l'homomorfisme de grups

$$l_G: G \longrightarrow G \otimes \mathbb{Z}_P,$$

on $l_G(g) = g \otimes 1$. El grup G es diu que és P -local si l_G és un isomorfisme. Un homomorfisme de grups abelians $f: G \longrightarrow H$ es diu que P -localitza a G si existeix un isomorfisme $h: G \otimes \mathbb{Z}_P \longrightarrow H$ tal que el següent diagrama commuta

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{l_G} & G \otimes \mathbb{Z}_P \\ \downarrow f & \swarrow h & \\ H & & \end{array}$$

Lema 3.4.1. *Per a cada grup abelià G , cada espectre X i tot $k \in \mathbb{Z}$, existeix una successió exacta natural de grups abelians*

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(G, \pi_{k+1}(X)) \longrightarrow [\Sigma^k MG, X] \longrightarrow \text{Hom}(G, \pi_k(X)) \longrightarrow 0$$

on MG és l'espectre de Moore associat a G .

Demostració. Sigui $\bigoplus_\alpha \mathbb{Z} \rightarrow \bigoplus_\beta \mathbb{Z} \rightarrow G$ una presentació lliure del grup G . Tenim associada una cofibració d'espectres de Moore

$$\vee_\alpha \Sigma^k S \longrightarrow \vee_\beta \Sigma^k S \longrightarrow \Sigma^k MG \longrightarrow \vee_\alpha \Sigma^{k+1} S \longrightarrow \vee_\beta \Sigma^{k+1} S$$

que dona la següent successió exacta

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\oplus_{\beta} \mathbb{Z}, \pi_{k+1}(X)) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(\oplus_{\alpha} \mathbb{Z}, \pi_{k+1}(X)) \longrightarrow [\Sigma^k MG, X] \\ &\longrightarrow \mathrm{Hom}(\oplus_{\beta} \mathbb{Z}, \pi_k(X)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\oplus_{\alpha} \mathbb{Z}, \pi_k(X)) \end{aligned}$$

per a tot $k \in \mathbb{Z}$. □

En el cas de la categoria homotòpica estable, per a cada espectre X , la P -localització de X es defineix com l'aplicació natural

$$1 \wedge \eta: X \simeq X \wedge S \longrightarrow X \wedge M\mathbb{Z}_P,$$

on $M\mathbb{Z}_P$ és l'espectre de Moore associat a $\mathbb{Z}_P$ i l'aplicació $\eta: S \longrightarrow M\mathbb{Z}_P$ correspon a la unitat de $\mathbb{Z}_P \cong \pi_0(M\mathbb{Z}_P)$. Un espectre X es diu que és P -local si l'aplicació $1 \wedge \eta$ és una equivalència. Sovint escriurem X_P per denotar $X \wedge M\mathbb{Z}_P$.

Una de les conseqüències directes de la definició és que la P -localització d'espectres és una localització homològica respecte a la teoria d'homologia que defineix $M\mathbb{Z}_P$ (veure Capítol 5). Així doncs, la P -localització commuta amb la suspensió. Un altre fet important és que $S_P \cong M\mathbb{Z}_P$ i per tant

$$X_P \cong X \wedge S_P$$

per a tot espectre X . Aquesta propietat ens diu que la P -localització de qualsevol espectre X ve determinada per la P -localització de l'espectre de les esferes. Aquesta característica no és pròpia únicament de la P -localització, sinó que la comparteixen altres functors de localització més generals, que anomenarem *functors de localització smashing*. Per a aquesta classe de functors, la localització de qualsevol espectre s'obté fent el producte *smash* d'aquest espectre amb la localització de l'esfera. Veurem més detalls sobre aquests functors de localització en la Secció 5.4.

La P -localització d'espectres P -localitza els grups d'homotopia i els grups d'homologia. En efecte, per a tot $k \in \mathbb{Z}$ i qualsevol espectre X tenim un isomorfisme

$$\pi_k(X_P) \cong \pi_k(X) \otimes \pi_0(M\mathbb{Z}_P) \cong \pi_k(X) \otimes \mathbb{Z}_P.$$

A partir d'aquest resultat es dedueix un isomorfisme anàleg per a homologia. Donats espectres X i Y qualssevol i per a tot $k \in \mathbb{Z}$, tenim un isomorfisme

$$E_k(X_P) \cong \pi_k(E \wedge X \wedge M\mathbb{Z}_P) \cong E_k(X) \otimes \mathbb{Z}_P.$$

No obstant això, no succeeix el mateix en el cas de la cohomologia. Aplicant el Lema 3.4.1 tenim el següent isomorfisme

$$\begin{aligned} E^k(X_P) &\cong [X \wedge M\mathbb{Z}_P, \Sigma^k E] \cong [M\mathbb{Z}_P, F(X, \Sigma^k E)] \\ &\cong \text{Hom}(\mathbb{Z}_P, E^k(X)) \oplus \text{Ext}(\mathbb{Z}_P, E^{k-1}(X)), \end{aligned}$$

per a tot $k \in \mathbb{Z}$ i espectres E i X qualssevol.

La P -localització d'espectres és un cas particular de f -localització. A continuació veurem com construir una aplicació f explícitament. Suposem que volem localitzar un espectre X en un conjunt de primers P . Per a cada primer q que no està en el conjunt P tenim una aplicació $S \xrightarrow{\times q} S$ que indueix multiplicació per q en $\pi_0(S) \cong \mathbb{Z}$. Sigui g el *wedge* de totes aquestes aplicacions, una per a cada q que no estigui en P ,

$$g: \bigvee_{q \notin P} S \longrightarrow \bigvee_{q \notin P} S$$

Amb aquesta definició de l'aplicació g , un espectre és g -local si l'aplicació induïda per g

$$F^c(\bigvee_{q \notin P} S, X) \longrightarrow F^c(\bigvee_{q \notin P} S, X)$$

és una equivalència homotòpica, és a dir, si els grups d'homotopia $\pi_k(X)$ són $\mathbb{Z}_P$ -mòduls per a tot $k \geq 0$.

Sigui ara l'aplicació $f = \bigvee_{n < 0} \Sigma^n g$ definida com el *wedge* de totes les desuspensions de g . En aquest cas, un espectre és f -local si i només si tots els seus grups d'homotopia són $\mathbb{Z}_P$ -mòduls. L'aplicació de P -localització $X \longrightarrow X_P$ és una equivalència (és a dir, l'espectre X és P -local) si i només si tots els grups d'homotopia de X són $\mathbb{Z}_P$ -mòduls. Així doncs, el functor L_f i el functor de P -localització tenen els mateixos espectres locals i per tant són equivalents.

Teorema 3.4.2. *Sigui P un conjunt de primers i sigui $g: \bigvee_{q \notin P} S \longrightarrow \bigvee_{q \notin P} S$ el wedge de totes les aplicacions (una per a cada q que no estigui en P) que indueixen multiplicació per q en $\pi_0(S)$, i considerem l'aplicació $f = \bigvee_{n < 0} \Sigma^n g$. Llavors, $L_f X \simeq X_P$ per a tot espectre X . $\square$*

Observeu que en la construcció de l'aplicació f no és necessari considerar totes les desuspensions per a $n < 0$; n'hi ha prou amb prendre les desuspensions a partir d'un cert $k \leq 0$. Així, si $f = \bigvee_{n < k} \Sigma^n g$, on $k \leq 0$, llavors també es compleix que $L_f X \simeq X_P$.

El functor de P -localització és també equivalent a la nul·lificació respecte a la cofibra de f , ja que la P -localització commuta amb la suspensió. En aquest cas, si C és la cofibra de f ,

$$C \simeq \bigvee_{q \notin P, n < 0} \Sigma^n M\mathbb{Z}/q.$$

També podem considerar el functor de nul·lificació respecte a $M = \bigvee_{q \notin P} M\mathbb{Z}/q$, la cofibra de g . El functor de nul·lificació corresponent P_M no commuta amb la suspensió, ja que L_g no commuta amb la suspensió, i no canvia els grups d'homotopia en dimensions negatives per la Proposició 3.3.2. Del Lema 3.4.1 es dedueix que els espectres M -nuls són aquells espectres X tals que $\pi_k(X)$ és un $\mathbb{Z}_P$ -mòdul per a tot $k > 0$ i $\pi_0 X$ és lliure de P' -torsió, on P' denota el complementari del conjunt P . Per tant, la nul·lificació respecte a $\bigvee_{q \notin P} M\mathbb{Z}/q$ mata la P' -torsió en π_0 i P -localitza els grups d'homotopia en dimensions positives. En aquest cas, la torre de localització (3.2) associada a l'aplicació g ens dóna una successió de functors de localització

$$\cdots \rightarrow P_{\Sigma M} \rightarrow L_{\Sigma g} \rightarrow P_M \rightarrow L_g \rightarrow P_{\Sigma^{-1}M} \rightarrow L_{\Sigma^{-1}g} \rightarrow P_{\Sigma^{-1}M} \rightarrow \cdots$$

que convergeix al functor identitat per l'esquerra i al functor de P -localització per la dreta.

Capítol 4

Conservació d'estructures

Existeix una àmplia quantitat d'estructures algebraiques que es conserven sota l'aplicació de functors idempotents en homotopia inestable i en altres categories. Per exemple, la classe dels espais que s'expressen com un producte d'espais d'Eilenberg–Mac Lane (també anomenats GEMs), es conserva quan apliquem un functor de localització respecte a qualsevol aplicació contínua. En la categoria de grups, els functors idempotents preserven els grups abelians, i altres estructures com la de grup nilpotent es conserven sota l'acció de localitzacions homològiques o localitzacions en conjunts de primers. Una recopilació recent de resultats sobre la preservació d'estructures per functors idempotents en la categoria d'espais topològics i en la categoria de grups pot trobar-se en [Cas00] i [Bas03].

En aquest capítol estudiem les estructures d'espectre anell i espectre mòdul en la categoria homotòpica estable i el seu comportament respecte als functors de localització. En aquesta categoria, els espectres anell es corresponen amb els monoides i els espectres mòdul amb els mòduls sobre monoides. Presentarem resultats sobre la conservació d'estructures d'espectre anell i espectre mòdul en la categoria homotòpica estable i derivarem algunes propietats importants. Demostrarem que els functors de localització es comporten bé respecte a aquestes estructures quan commuten amb la suspensió o si afegim adequades hipòtesis de connectivitat. Per exemple, els functors de localització conserven espectres mòdul sobre espectres anell connectius.

Un cas important d'espectres mòdul el formen els espectres mòdul sobre l'espectre anell d'Eilenberg–Mac Lane HR , o HR -mòduls, on R és un anell amb unitat. Veurem que aquests espectres són precisament els R -GEMs estables,

és a dir, espectres que escindeixen com un *wedge* de suspensions d'espectres d'Eilenberg–Mac Lane tals que els seus grups d'homotopia són R -mòduls. Com a conseqüència, demostrarem que els functors de localització preserven R -GEMs estables, anàlogament a com succeeix en el cas inestable [Far96, 4.B.4].

4.1 Espectres anell i espectres mòdul

Encara que és possible treballar amb mòduls i anells estrictes gràcies a les noves categories de models per a l'homotopia estable, durant tot el capítol treballarem amb espectres anell i espectres mòdul en la categoria homotòpica. En el Capítol ?? tractarem amb més detall la diferència entre espectres mòdul estrictes i homotòpics i les seves categories associades.

Treballarem en la categoria homotòpica estable Ho^s . Els espectres anell i els espectres mòdul es defineixen en aquesta categoria com els monoides i els mòduls sobre monoides respectivament.

Definició 4.1.1. Un *espectre anell* E és un espectre juntament amb dues aplicacions $\mu: E \wedge E \longrightarrow E$ i $\eta: S \longrightarrow E$, anomenades *producte* i *unitat* de l'anell, i tals que els següents diagrames commuten llevat d'homotopia:

$$\begin{array}{ccc} E \wedge E \wedge E & \xrightarrow{1 \wedge \mu} & E \wedge E \\ \mu \wedge 1 \downarrow & & \downarrow \mu \\ E \wedge E & \xrightarrow{\mu} & E \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} E \wedge S & \xrightarrow{1 \wedge \eta} & E \wedge E & \xleftarrow{\eta \wedge 1} & S \wedge E \\ & \searrow & \downarrow \mu & \swarrow & \\ & & E & & \end{array}$$

De vegades es denota l'espectre anell E per (E, μ, η) .

Un espectre anell E es diu *commutatiu* si el següent diagrama commuta llevat d'homotopia:

$$\begin{array}{ccc} E \wedge E & \xrightarrow{\tau} & E \wedge E \\ & \searrow \mu & \swarrow \mu \\ & E & \end{array}$$

on τ és l'aplicació *twist* (que permuta els dos factors).

Una aplicació $\varphi: (E, \mu, \eta) \rightarrow (E', \mu', \eta')$ d'espectres anell és una aplicació $\varphi: E \longrightarrow E'$ que és compatible amb el producte i la unitat dels dos anells, és

a dir, tal que els següents diagrames commuten llevat d'homotopia:

$$\begin{array}{ccc}
 E \wedge E & \xrightarrow{\varphi \wedge \varphi} & E' \wedge E' \\
 \mu \downarrow & & \downarrow \mu' \\
 E & \xrightarrow{\varphi} & E'
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & S & \\
 \eta \swarrow & & \searrow \eta' \\
 E & \xrightarrow{\varphi} & E.
 \end{array}$$

La categoria d'espectres anell (homotòpics) és la subcategoria de Ho^s amb objectes els espectres anell i morfismes les aplicacions d'espectres anell. Donat un espectre anell podem considerar els mòduls sobre aquest anell.

Definició 4.1.2. Donat un espectre anell (E, μ, η) , un *espectre mòdul* (M, m) sobre E , o simplement un E -mòdul, és un espectre M juntament amb una aplicació $m: E \wedge M \rightarrow M$ tal que els següents diagrames commuten llevat d'homotopia:

$$\begin{array}{ccc}
 E \wedge E \wedge M & \xrightarrow{\mu \wedge 1} & E' \wedge M \\
 1 \wedge m \downarrow & & \downarrow m \\
 E \wedge M & \xrightarrow{m} & M
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 S \wedge M & \xrightarrow{\eta \wedge 1} & E \wedge M \\
 & \searrow & \downarrow m \\
 & & M.
 \end{array}$$

Si M i N són dos E -mòduls, una aplicació $\varphi: (M, m) \rightarrow (N, n)$ és una aplicació de E -mòduls si és compatible amb les aplicacions d'estructura m i n , és a dir, si el següent diagrama commuta llevat d'homotopia:

$$\begin{array}{ccc}
 E \wedge M & \xrightarrow{1 \wedge \varphi} & E \wedge N \\
 m \downarrow & & \downarrow n \\
 M & \xrightarrow{\varphi} & N.
 \end{array}$$

La categoria de E -mòduls (homotòpics) és la subcategoria de Ho^s amb objectes els E -mòduls i morfismes les aplicacions de E -mòduls. Denotarem aquesta categoria per $E\text{-}hmod$.

Exemple 4.1.3. Sigui R un anell (en el sentit algebraic) amb unitat i M un R -mòdul. Llavors l'espectre d'Eilenberg–Mac Lane HR associat a R és un espectre anell, que és commutatiu si R ho és, i l'espectre HM és un HR -mòdul. De fet, les aplicacions que defineixen les estructures d'espectre anell i mòdul vénen induïdes per la multiplicació i la unitat de R com a anell i l'aplicació d'estructura de M com a R -mòdul. Més concretament, la multiplicació en R és

un element de $\text{Hom}(R \otimes R, R)$, que dóna lloc a una aplicació $\mu: HR \wedge HR \longrightarrow HR$ de la següent manera:

$$\begin{aligned} [HR \wedge HR, HR] &= (HR)^0(HR \wedge HR) \\ &\cong \text{Hom}((H\mathbb{Z})_0(HR \wedge HR), R) = \text{Hom}(R \otimes R, R). \end{aligned}$$

En l'última igualtat fem servir que $(H\mathbb{Z})_0(HR \wedge HR) = R \otimes R$. Aquest fet es dedueix utilitzant que HR i $HR \wedge HR$ són espectres connectius i aplicant el Teorema 1.2.14 (Teorema de Hurewicz). La unitat de R és un element de $\pi_0(HR)$ i per tant dóna lloc a una aplicació $\eta: S \longrightarrow HR$. Llavors (HR, μ, η) així definit és un espectre anell. Els diagrames que defineixen l'estructura d'espectre anell commuten gràcies a l'isomorfisme natural

$$[X, HR] \cong \text{Hom}((H\mathbb{Z})_0(X), (H\mathbb{Z})_0(HR)),$$

que es dedueix del teorema de coeficients universals (Teorema 1.2.16) i que és vàlid per a tot espectre X que sigui connectiu.

Per veure que HM és un HR -mòdul es procedeix de la mateixa manera. Ara l'estructura de R -mòdul de M ve donada per un element de $\text{Hom}(R \otimes M, M)$ i aquest dóna lloc a una aplicació $m: HR \wedge HR \longrightarrow HM$, ja que

$$\begin{aligned} [HR \wedge HM, HM] &= (HM)^0(HR \wedge HM) \\ &\cong \text{Hom}((H\mathbb{Z})_0(HR \wedge HM), M) = \text{Hom}(R \otimes M, M). \end{aligned}$$

Així doncs, el parell (HM, m) és un HR -mòdul.

Observació 4.1.4. De la mateixa manera que tot anell és un grup abelià, l'espectre HR és un $H\mathbb{Z}$ -mòdul per a tot anell R , via l'aplicació $H\mathbb{Z} \longrightarrow HR$ induïda pel morfisme $\mathbb{Z} \longrightarrow R$ que envia la unitat de $\mathbb{Z}$ a la unitat de l'anell R .

Si M és un espectre E -mòdul, llavors per a cada espectre X el grup abelià graduat $[\Sigma^* X, M]$ és un $\pi_*(E)$ -mòdul. Per a cada aplicació $\alpha \in \pi_i(E)$ i cada aplicació $f \in [\Sigma^j X, M]$ obtenim una altra aplicació en $[\Sigma^{i+j} X, M]$ component amb l'aplicació d'estructura de E -mòdul de M de la següent manera:

$$\Sigma^{i+j} X \simeq \Sigma^i S \wedge \Sigma^j X \xrightarrow{\alpha \wedge f} E \wedge M \xrightarrow{m} M.$$

En particular, prenent $i = 0$ i $X = S$ obtenim que, si M és un HR -mòdul, llavors els seus grups d'homotopia $\pi_k(M)$ són R -mòduls per a tot $k \in \mathbb{Z}$.

4.2 Localització d'espectres anell i espectres mòdul

A continuació estudiarem la interacció dels functors de localització amb les estructures d'anell i de mòdul. En el cas de functors de f -localització que commuten amb la suspensió, la f -localització d'un espectre anell o mòdul adquireix una estructura compatible d'anell o mòdul respectivament. Recordem que el functor L_f commuta amb la suspensió si $L_f \Sigma X \simeq \Sigma L_f X$ per a tot espectre X (veure Teorema 3.2.6).

En la resta d'aquesta secció suposarem que f és una aplicació d'espectres qualsevol i escriurem L per denotar al functor de localització L_f . De la mateixa manera ens referirem com a espectres locals o espectres L -locals als espectres f -locals, i com a L -equivalències a les f -equivalències.

Teorema 4.2.1. *Si el functor de localització L commuta amb la suspensió, llavors es compleix el següent:*

- i) *Si E és un espectre anell, llavors l'espectre LE adquireix una única estructura d'espectre anell tal que l'aplicació $l_E: E \longrightarrow LE$ és una aplicació d'anells. Si a més a més E és commutatiu, llavors també ho és LE .*
- ii) *Si M és un espectre E -mòdul, llavors l'espectre LM adquireix una única estructura de E -mòdul tal que l'aplicació $l_M: M \longrightarrow LM$ és una aplicació de E -mòduls. A més LM admet una única estructura de LE -mòdul que estén l'estructura de E -mòdul.*

Demostració. Per a demostrar la primera part necessitem construir un producte i una unitat en LE . Com l'espectre LE és local i el functor de localització commuta amb la suspensió, pel Teorema 3.2.6 tenim una equivalència homotòpica

$$F(E, LE) \simeq F(LE, LE).$$

Aquesta equivalència, juntament amb la propietat d'adjunció del producte *smash* dona lloc a una successió d'isomorfismes

$$\begin{aligned} [E \wedge E, LE] &\cong [E, F(E, LE)] \cong [E, F(LE, LE)] \\ &\cong [E \wedge LE, LE] \cong [LE, F(E, LE)] \cong [LE, F(LE, LE)] \\ &\cong [LE \wedge LE, LE]. \end{aligned}$$

D'aquesta manera, si μ i η són el producte i la unitat respectivament de l'espectre anell E , l'aplicació μ s'estén a una única aplicació

$$\bar{\mu}: LE \wedge LE \longrightarrow LE$$

que fa que el següent diagrama commuti llevat d'homotopia:

$$\begin{array}{ccc} E \wedge E & \xrightarrow{\mu} & E \\ \downarrow l_E \wedge l_E & & \downarrow l_E \\ LE \wedge LE & \xrightarrow{\bar{\mu}} & LE. \end{array} \quad (4.1)$$

La unitat $\bar{\eta}$ de LE la definim com la composició $l_E \circ \eta$:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{LE} & LE \\ \uparrow \eta & \nearrow \bar{\eta} & \\ S. & & \end{array} \quad (4.2)$$

L'espectre LE juntament amb les aplicacions $\bar{\mu}$ i $\bar{\eta}$ té estructura d'espectre anell. La commutativitat dels diagrames que defineixen aquesta estructura per a $\bar{\mu}$ i $\bar{\eta}$ es dedueixen de la commutativitat dels diagrames per a μ i η i de la propietat universal del functor de localització (utilitzant la part viii) del Teorema 3.2.6). La commutativitat dels diagrames (4.1) i (4.2) converteixen a l'aplicació de localització $LE: E \longrightarrow LE$ en una aplicació d'anells.

La segona part es demostra de la mateixa manera. Ara necessitem construir una aplicació $\bar{m}: E \wedge LM \longrightarrow LM$ que doti a LM d'una estructura de E -mòdul. Sigui $m: E \wedge M \longrightarrow M$ l'aplicació d'estructura de E -mòdul de M . Tenim ara una successió d'isomorfismes

$$[E \wedge M, LM] \cong [E, F(M, LM)] \cong [E, F(LM, LM)] \cong [E \wedge LM, LM]. \quad (4.3)$$

D'aquesta manera, l'aplicació m s'estén a una única aplicació

$$\bar{m}: E \wedge LM \longrightarrow LM$$

que fa que el següent diagrama commuti llevat d'homotopia:

$$\begin{array}{ccc} E \wedge M & \xrightarrow{m} & M \\ \downarrow 1 \wedge l_M & & \downarrow l_M \\ E \wedge LM & \xrightarrow{\bar{m}} & LM, \end{array} \quad (4.4)$$

i així, $\overline{m}$ dota a LM d'estructura de E -mòdul. Com abans, la commutativitat dels diagrames d'estructura per a $\overline{m}$ es dedueix de la commutativitat dels diagrames per a m i la propietat universal de la localització. La commutativitat del diagrama (4.4) prova que l'aplicació de localització $l_M: M \longrightarrow LM$ és una aplicació de E -mòduls.

Per a dotar a LM amb una estructura de LE -mòdul n'hi ha prou amb avançar un pas més en els isomorfismes de (4.3):

$$[E \wedge LM, LM] \cong [LM, F(E, LM)] \cong [LM, F(LE, LM)] \cong [LM \wedge LE, LM].$$

Així, l'aplicació $m: E \wedge M \longrightarrow M$ s'estén a una única aplicació $\tilde{m}: LE \wedge LM \longrightarrow LM$ que fa que el següent diagrama commuti llevat d'homotopia:

$$\begin{array}{ccc} E \wedge M & \xrightarrow{m} & M \\ \downarrow l_E \wedge l_M & & \downarrow l_M \\ LE \wedge LM & \xrightarrow[\tilde{m}]{} & LM, \end{array}$$

donant a LM una estructura de LE -mòdul. □

Els functors de localització que no commuten amb la suspensió no conserven les estructures d'espectre anell i espectre mòdul en general, com veurem a continuació. El següent lema és útil per demostrar que certs espectres no admeten estructura d'anell o mòdul.

Lema 4.2.2. *Siguin E i F dos espectres anell i sigui M un espectre E -mòdul. Si $F_0(E) = 0$, llavors $F_k(M) = 0$ per a tot $k \in \mathbb{Z}$.*

Demostració. Com que E i F són espectres anell, també ho és $E \wedge F$, prenent com producte i com unitat el *smash* dels productes i les unitats de E i F respectivament. Per hipòtesi $F_0(E) = 0$, que és equivalent a que $\pi_0(E \wedge F) = 0$; per tant, la unitat $S \longrightarrow E \wedge F$ de $E \wedge F$ és nul·la i això implica que $E \wedge F \simeq 0$. Si M és un E -mòdul, llavors la composició

$$S \wedge M \xrightarrow{\eta \wedge 1} E \wedge M \xrightarrow{m} M,$$

on η és la unitat de E i m és l'aplicació d'estructura de E -mòdul de M , és una equivalència homotòpica. Si fem el producte *smash* de F amb aquesta composició seguim tenint una equivalència

$$S \wedge F \wedge M \longrightarrow E \wedge F \wedge M \longrightarrow F \wedge M,$$

i així obtenim que $F \wedge M \simeq 0$, pel que $F_i(M) = \pi_i(F \wedge M) = 0$ per a tot $i \in \mathbb{Z}$. $\square$

Exemple 4.2.3. El següent exemple mostra que la localització no conserva en general les estructures d'espectre anell i espectre mòdul. Donat un nombre natural n i un nombre primer p , denotarem per $K(n)$ l'espectre anell corresponent a la n -èsima teoria K de Morava referida al primer p . Considerem ara el functor de localització corresponent a la secció de Postnikov en el nivell zero. Donat un espectre X qualsevol, es denota per $X_{(0)}$ la secció de Postnikov en el nivell zero de X (veure Definició 1.2.11). Aquest functor és el functor de f -localització respecte a l'aplicació $f: \Sigma S \rightarrow *$. Si l'apliquem a l'espectre $K(n)$, tenim que $(H\mathbb{Z}/p)_0(K(n)_{(0)}) = 0$ i $(H\mathbb{Z}/p)_i(K(n)_{(0)}) \neq 0$ per a algun $i > 0$ (veure [Rud98, IX.7.27]). Pel Lema 4.2.2, això implica que $K(n)_{(0)}$ no pot tenir estructura d'espectre anell.

Un altra manera de veure aquest fet és a partir de la cofibració

$$\Sigma^d k(n) \longrightarrow K(n) \longrightarrow K(n)_{(0)}, \quad (4.5)$$

on $d = 2(p^n - 1)$ i $k(n)$, que és la cofibra de l'aplicació de localització, denota el recubridor connectiu de $K(n)$. Suposem que $K(n)_{(0)}$ fos un espectre anell. Llavors $K(n)_{(0)} \wedge H\mathbb{Z}/p$ també ho seria, ja que $H\mathbb{Z}/p$ ho és. Com que $K(n) \wedge H\mathbb{Z}/p \simeq 0$, es segueix que $(H\mathbb{Z}/p)_0(K(n)_{(0)}) = 0$. Per tant, la unitat $S \rightarrow K(n)_{(0)} \wedge H\mathbb{Z}/p$ de $K(n)_{(0)} \wedge H\mathbb{Z}/p$ seria nul·la, i això implicaria que $K(n)_{(0)} \wedge H\mathbb{Z}/p \simeq 0$. Però això, juntament amb la cofibració (4.5), portaria a una contradicció, ja que la cohomologia mòdul p de $k(n)$, és un quocient no nul de l'àlgebra de Steenrod (veure [Rud98, IX.7.17]).

El mateix argument, considerant $K(n)$ com un mòdul sobre si mateix i utilitzant que $(H\mathbb{Z}/p)_0(K(n)) = 0$ i el Lema 4.2.2, prova que $K(n)_{(0)}$ no té estructura de $K(n)$ -mòdul.

El fet que els functors de localització que no commuten amb la suspensió no conservin en general les estructures d'espectre anell i espectre mòdul pot solucionar-se imposant algunes condicions de connectivitat sobre els espectres, que facin que la adjunció

$$F^c(X \wedge E, Z) \simeq F^c(X, F(E, Z)),$$

en la qual apareixen els recubridors connectius de l'espectre de funcions, sigui vàlida. Això és cert quan l'espectre X és connectiu.

Teorema 4.2.4. *Si L és un functor de localització qualsevol, llavors es compleix el següent:*

- i) *Si E és un espectre anell connectiu i LE és connectiu, llavors l'espectre LE adquireix una única estructura d'espectre anell tal que l'aplicació de localització $l_E: E \longrightarrow LE$ és una aplicació d'anells. Si a més a més E és commutatiu, llavors també ho és l'espectre LE .*
- ii) *Si M és un espectre E -mòdul, on E és un espectre anell connectiu, llavors l'espectre LM adquireix una única estructura de E -mòdul tal que l'aplicació de localització $l_M: M \longrightarrow LM$ és una aplicació de E -mòduls. A més si LE també és connectiu, LM admet una única estructura de LE -mòdul que estén l'estructura de E -mòdul.*

Demostració. Si E és un espectre connectiu, tenim les següents equivalències

$$F^c(E, F^c(X, Y)) \simeq F^c(E, F(X, Y)) \simeq F^c(E \wedge X, Y)$$

per a tot parell d'espectres X i Y , que donen lloc a una bijecció

$$[E, F^c(X, Y)] \cong [E \wedge X, Y].$$

La demostració es completa seguint els mateixos passos que en la demostració del Teorema 4.2.1 □

Observació 4.2.5. La hipòtesi que LE sigui connectiu en el Teorema 4.2.4 es compleix automàticament quan els espectres E , A i B són connectius, per la Proposició 3.3.2 (A i B són els espectres que apareixen en l'aplicació f que defineix el functor de localització).

4.3 Mòduls sobre espectres d'Eilenberg–Mac Lane

En aquesta secció descriurem l'estructura dels mòduls sobre espectres anell d'Eilenberg–Mac Lane. Aquests mòduls vindran caracteritzats per ser precisament aquells mòduls que escindeixen com un *wedge* de suspensions d'espectres d'Eilenberg–Mac Lane. En el cas d'espais topològics, aquells espais que escindeixen com un producte d'espais d'Eilenberg–Mac Lane es diuen GEMs.

Els espais X amb aquesta propietat estan caracteritzats per ser retractes de $\mathrm{SP}^\infty X$, on SP^∞ és el producte simètric infinit de Dold–Thom [Far96, 4.B.2].

Donat un anell R qualsevol amb unitat, considerem l'espectre d'Eilenberg–Mac Lane associat HR . Com hem vist anteriorment en l'Exemple 4.1.3, HR és un espectre anell. Donat un espectre X qualsevol, podem aconseguir un espectre HR -mòdul simplement prenent $HR \wedge X$. Aquest fet és més general, i es compleix per a qualsevol espectre anell. Si E és un espectre anell i X és un espectre qualsevol, llavors el producte *smash* $E \wedge X$ és un E -mòdul via l'aplicació d'estructura donada per

$$\mu \wedge 1: E \wedge E \wedge X \longrightarrow E \wedge X,$$

on μ és el producte de E .

Per a qualsevol espectre anell (E, μ, η) , tenim que $(E \wedge -, \eta \wedge 1, \mu \wedge 1)$ és una mònada en la categoria homotòpica estable Ho^s . Les àlgebres sobre aquesta mònada són els parells (M, m) on M és un espectre i $m: E \wedge M \longrightarrow M$ és una aplicació que fa que certs diagrames commutin llevat d'homotopia. Aquests diagrames doten a M amb l'estructura d'un espectre E -mòdul. Així, la categoria d'àlgebres, també anomenada *categoria d'Eilenberg–Moore*, associada a la mònada $(E \wedge -, \eta \wedge 1, \mu \wedge 1)$, és la categoria de E -mòduls que denotarem $E\text{-}hmod$. El corresponent grup d'aplicacions de E -mòduls de M a N en aquesta categoria el denotarem per $[M, N]_{E\text{-}hmod}$. Tots els detalls sobre mònades i categories de mòduls es discuteixen en el Capítol ???. Ara simplement necessitem utilitzar el resultat que diu que tota mònada factoritza com un parell de functors adjunts a través de la seva categoria d'Eilenberg–Moore [Bor94, Ch.4]. En el nostre cas, aquest fet ens proporciona el següent isomorfisme:

Lema 4.3.1. *Sigui E un espectre anell. El functor*

$$E \wedge -: Ho^s \longrightarrow E\text{-}hmod$$

que assigna a cada espectre X l'espectre $E \wedge X$ és adjunt per l'esquerra del functor oblit $E\text{-}hmod \longrightarrow Ho^s$, és a dir, per a tot espectre X i tot E -mòdul M , hi ha un isomorfisme natural

$$[X, M] \cong [E \wedge X, M]_{E\text{-}hmod} \tag{4.6}$$

induït per la unitat de E . □

Definició 4.3.2. Sigui R un anell amb unitat. Un espectre E és un R -GEM estable si és equivalent a un *wedge* de suspensions d'espectres d'Eilenberg–Mac Lane, és a dir,

$$E \simeq \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} \Sigma^k H A_k,$$

on cada A_k és un R -mòdul (i per tant cada $H A_k$ és un HR -mòdul). Quan $R = \mathbb{Z}$, els $\mathbb{Z}$ -GEMs estables es diuen simplement *GEMs estables*.

Anem a estudiar en primer lloc el cas en que $R = \mathbb{Z}$. De la definició de GEM estable es segueix que si M és un GEM estable, llavors també és un $H\mathbb{Z}$ -mòdul, ja que és un *wedge* d'espectres d'Eilenberg–Mac Lane que són $H\mathbb{Z}$ -mòduls. El recíproc també és cert.

Proposició 4.3.3. *Per a cada $H\mathbb{Z}$ -mòdul M existeix una aplicació de $H\mathbb{Z}$ -mòduls*

$$H\mathbb{Z} \wedge \left(\bigvee_{k \in \mathbb{Z}} \Sigma^k M A_k \right) \xrightarrow{\alpha} M$$

que és una equivalència homotòpica, on $A_k = \pi_k(M)$.

Demostració. Per a cada $k \in \mathbb{Z}$, triem una aplicació α_k de $[\Sigma^k M A_k, M]$ que vagi a parar a la identitat de $\text{Hom}(A_k, A_k)$ via l'aplicació donada en la successió exacta del Lema 3.4.1. Per l'isomorfisme natural (4.6), cada α_k dona lloc a una aplicació de $H\mathbb{Z}$ -mòduls

$$\tilde{\alpha}_k : H\mathbb{Z} \wedge \Sigma^k M A_k \longrightarrow M$$

tal que $\tilde{\alpha}_k = m \circ (1 \wedge \alpha_k)$, on m és l'aplicació d'estructura de M com a $H\mathbb{Z}$ -mòdul. Tenim el següent diagrama commutatiu llevat d'homotopia:

$$\begin{array}{ccc} S \wedge \Sigma^k M A_k & \xrightarrow{1 \wedge \alpha_k} & S \wedge M \\ \eta \wedge 1 \downarrow & & \downarrow \eta \wedge 1 \\ H\mathbb{Z} \wedge \Sigma^k M A_k & \xrightarrow{1 \wedge \alpha_k} & H\mathbb{Z} \wedge M \xrightarrow{m} M. \end{array}$$

Cada $\tilde{\alpha}_k$ induïx un isomorfisme en π_k , ja que l'aplicació $\eta \wedge 1$ de l'esquerra del diagrama i l'aplicació $1 \wedge \alpha_k$ de la part superior induïxen isomorfismes en π_k (on η és la unitat de l'espectre anell $H\mathbb{Z}$). Per la propietat universal del *wedge* podem construir ara una aplicació

$$\alpha : H\mathbb{Z} \wedge \left(\bigvee_{k \in \mathbb{Z}} \Sigma^k M A_k \right) \longrightarrow M$$

tal que $\alpha \circ i_k = \tilde{\alpha}_k$, on i_k són les corresponents inclusions de cada $H\mathbb{Z} \wedge \Sigma^k H A_k$ en el *wedge*. Així doncs, α indueix isomorfisme en π_k per a tot $k \in \mathbb{Z}$ i és per tant una equivalència homotòpica. $\square$

Corol·lari 4.3.4. *Un espectre X és un $H\mathbb{Z}$ -mòdul si i només si existeix un altre espectre Y tal que $X \simeq H\mathbb{Z} \wedge Y$.* $\square$

Observació 4.3.5. La Proposició 4.3.3 ens diu que els espectres $H\mathbb{Z}$ -mòduls són precisament els GEMs estables, ja que $H\mathbb{Z} \wedge MG \simeq HG$ per a qualsevol grup abelià G i, per tant, si M és un $H\mathbb{Z}$ -mòdul llavors $M \simeq \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} \Sigma^k H(\pi_k(M))$. De la mateixa manera, els HR -mòduls i els R -GEMs estables són el mateix, perquè cada HR -mòdul és un $H\mathbb{Z}$ -mòdul i els grups d'homotopia d'un HR -mòdul són R -mòduls (veure l'Observació 4.1.4).

Corol·lari 4.3.6. *Siguin A i B dos grups abelians qualssevol. Llavors*

$$\begin{aligned} [HA, HB]_{H\mathbb{Z}\text{-}hmod} &\cong \text{Hom}(A, B), \\ [HA, \Sigma HB]_{H\mathbb{Z}\text{-}hmod} &\cong \text{Ext}(A, B), \\ [HA, \Sigma^k HB]_{H\mathbb{Z}\text{-}hmod} &= 0 \text{ si } k \neq 0, 1. \end{aligned}$$

Demostració. Per a l'espectre HA , la Proposició 4.3.3 implica en particular que $H\mathbb{Z} \wedge MA \simeq HA$ com a $H\mathbb{Z}$ -mòduls. Pel Lema 4.3.1, tenim un isomorfisme natural

$$[MA, \Sigma^k HB] \cong [HA, \Sigma^k HB]_{H\mathbb{Z}\text{-}hmod}.$$

El resultat es completa utilitzant el Lema 3.4.1. $\square$

A més de la caracterització dels GEMs estables com a $H\mathbb{Z}$ -mòduls, existeixen altres maneres indirectes de detectar quan un espectre és un GEM estable, que són conseqüència fonamentalment del anomenat '*Lema Clau*' estable de Bousfield [Bou96, Lema 2.4], que s'enuncia a continuació:

Lema 4.3.7. *Donats dos espectres X i Y qualssevol, si $[\Sigma^k X, Y] = 0$ per a tot $k \geq 1$, llavors*

$$[H\mathbb{Z} \wedge X, Y] \cong [X, Y] \quad i \quad [\Sigma^k H\mathbb{Z} \wedge X, Y] = 0$$

per a tot $k \geq 1$.

Demostració. Sigui C la cofibra de l'aplicació $S \rightarrow H\mathbb{Z}$ donada per la unitat de l'espectre anell $H\mathbb{Z}$. Utilitzant la successió exacta llarga associada a la cofibració $S \rightarrow H\mathbb{Z} \rightarrow C$, tenim que $\pi_k(C) = 0$ si $k \leq 1$. Com que $\pi_k(F(X, Y)) = [\Sigma^k X, Y] = 0$ si $k \geq 1$, llavors

$$[\Sigma^k C \wedge X, Y] = [\Sigma^k C, F(X, Y)] = 0 \quad \text{per a tot } k \geq -1.$$

Ara, a partir de la successió exacta

$$\begin{aligned} [\Sigma^2 X, Y] &\rightarrow [\Sigma C \wedge X, Y] \rightarrow [\Sigma H\mathbb{Z} \wedge X, Y] \rightarrow [\Sigma X, Y] \\ &\rightarrow [C \wedge X, Y] \rightarrow [H\mathbb{Z} \wedge X, Y] \rightarrow [X, Y] \rightarrow [\Sigma^{-1} C \wedge X, Y] \rightarrow \dots \end{aligned}$$

tenim que $[H\mathbb{Z} \wedge X, Y] \cong [X, Y]$ i $[\Sigma^k H\mathbb{Z} \wedge X, Y] = 0$ per a tot $k \geq 1$. $\square$

Corol·lari 4.3.8. *Si $[\Sigma^k X, X] = 0$ per a tot $k \geq 1$, llavors X té una estructura natural de GEM estable.*

Demostració. Pel Lema 4.3.7, $[H\mathbb{Z} \wedge X, X] = [X, X]$. La identitat en $[X, X]$ ens dóna de forma natural una aplicació $m: H\mathbb{Z} \wedge X \rightarrow X$ que dóna estructura de $H\mathbb{Z}$ -mòdul a X . $\square$

També hi ha maneres d'aconseguir GEMs estables a partir de la localització d'un espectre qualsevol. Sigui f una aplicació d'espectres i sigui L_f el functor de f -localització associat.

Corol·lari 4.3.9. *Donat un espectre X qualsevol, si $L_f X = 0$ llavors $L_{\Sigma f} X$ és un GEM estable.*

Demostració. Com que $\Sigma^{-k} L_{\Sigma f} X$ és f -local per a tot $k \geq 1$ i $L_f L_{\Sigma f} X \simeq L_f X = 0$, llavors

$$[\Sigma^k L_{\Sigma f} X, L_{\Sigma f} X] \cong [L_{\Sigma f} X, \Sigma^{-k} L_{\Sigma f} X] = 0 \quad \text{per a tot } k \geq 1.$$

Podem aplicar per tant a $L_{\Sigma f} X$ el Corol·lari 4.3.8. $\square$

Com ja hem vist, els functors de localització no preserven cofibracions en general. Aquells functors que les conserven estan caracteritzats per la propietat de commutar amb la suspensió (Teorema 3.2.6). Però hi ha una classe de functors de localització que són els quasi-exactes, que 'gairebé' conserven

cofibracions. De fet, preserven aquelles que la seva cofibra és local (veure Proposició 3.2.10). Aquesta propietat de gairebé conservació de cofibracions pot mesurar-se en termes de GEMs estables. Sigui L_f un functor de f -localització qualsevol i sigui $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ una cofibració d'espectres. La fibra de l'aplicació natural

$$L_f X \longrightarrow \text{fib}(L_f Y \longrightarrow L_f Z)$$

es diu *terme d'error* del functor L_f associat a la cofibració. Aquest terme mesura d'alguna manera el que li falta al functor L_f per a preservar la cofibració, és a dir, si el terme d'error és nul, llavors $L_f X \rightarrow L_f Y \rightarrow L_f Z$ és una cofibració.

Proposició 4.3.10. *Si L_f és un functor de localització quasi-exacte, llavors la fibra de l'aplicació natural $L_{\Sigma f} X \longrightarrow L_f X$ és un GEM estable per a tot espectre X .*

Demostració. Sigui F la fibra de l'aplicació $L_{\Sigma f} X \longrightarrow L_f X$. Com que L_f és quasi-exacte, si apliquem el functor a la cofibració $F \rightarrow L_{\Sigma f} X \rightarrow L_f X$ tornem a obtenir una cofibració per la Proposició 3.2.10, ja que $L_f X$ és f -local. Ara bé, com que $L_f L_{\Sigma f} X \simeq L_f X$, llavors $L_f F = 0$ i així, pel Corol·lari 4.3.9, $L_{\Sigma f} F$ és un GEM estable. Però F és Σf -local, per tant $F \simeq L_{\Sigma f} F$. $\square$

Teorema 4.3.11. *Si L_f és un functor quasi-exacte, llavors el terme d'error de L_f associat a qualsevol cofibració és un GEM estable.*

Demostració. Sigui $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ una cofibració d'espectres i sigui F el seu terme d'error associat. Considerem el següent diagrama commutatiu, en el qual les files i columnes són cofibracions:

$$\begin{array}{ccccc} F & \longrightarrow & F_2 & \longrightarrow & F_1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ L_f X & \longrightarrow & \bar{Y} & \longrightarrow & L_{\Sigma f} Z \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ F_0 & \longrightarrow & L_f Y & \longrightarrow & L_f Z. \end{array}$$

La segona fila és la cofibració donada en la Proposició 3.2.9. Els espectres F_0 , F_1 i F_2 són les fibres de les corresponents aplicacions. Com que el functor L_f és quasi-exacte, $\bar{Y} \simeq L_{\Sigma f} Y$. Els espectres F_1 i F_2 tenen estructura de GEM estable, per la Proposició 4.3.10. Per tant, també la té F , que és la fibra de l'aplicació $F_2 \longrightarrow F_1$. $\square$

4.4 Localització de GEMs estables

En aquesta secció veurem com els R -GEMs estables es conserven sota l'acció d'un functor de f -localització. Estudiarem el cas particular de la localització de la n -èsima suspensió d'un espectre d'Eilenberg–Mac Lane i veurem que aquesta localització té com a màxim dos grups d'homotopia no trivials en dimensions n i $n + 1$.

En el que segueix, L denotarà el functor de localització L_f respecte a una aplicació qualsevol f d'espectres. Utilitzant els resultats sobre localització de E -mòduls de la secció 4.2, podem demostrar el següent resultat sobre conservació de R -GEMs estables.

Teorema 4.4.1. *Sigui R un anell amb unitat. Si E és un R -GEM estable, llavors LE també és un R -GEM estable i l'aplicació de localització $l_E: E \longrightarrow LE$ és una aplicació de HR -mòduls.*

Demostració. Un R -GEM estable és el mateix que un HR -mòdul i l'espectre anell HR és connectiu. Podem aplicar per tant l'apartat ii) del Teorema 4.2.4 per acabar la demostració. $\square$

Aquest teorema ens diu que si $E \simeq \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} \Sigma^k H A_k$ on cada A_k és un R -mòdul, llavors

$$LE \simeq \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} \Sigma^k H G_k,$$

on cada G_k torna a ser un R -mòdul. D'especial interès és el cas en el qual l'espectre E consisteix únicament en la n -èsima suspensió d'un espectre d'Eilenberg–Mac Lane, és a dir, $E \simeq \Sigma^n H G$ amb G un R -mòdul i $n \in \mathbb{Z}$. Aplicant el teorema 4.4.1, sabem que

$$L \Sigma^n H G \simeq \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} \Sigma^k H G_k,$$

on cada G_k és un R -mòdul. De fet, la major part dels G_k són nuls, com veurem a continuació. Considerem la següent successió d'aplicacions de $H\mathbb{Z}$ -mòduls (recordeu que tot HR -mòdul és un $H\mathbb{Z}$ -mòdul):

$$\Sigma^n H G \xrightarrow{l} L \Sigma^n H G \xrightarrow{\beta} \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} \Sigma^k H G_k \xrightarrow{p_i} \Sigma^i H G_i$$

on l és l'aplicació de localització, β és una inversa homotòpica de l'aplicació de la Proposició 4.3.3 i p_i és la projecció en el i -èsim factor. Pel Corol·lari 4.3.6 tenim que

$$[\Sigma^n H G, \Sigma^i H G_i]_{H\mathbb{Z}\text{-}hmod} = 0$$

excepte quan $i = n$ o $i = n + 1$. La propietat universal de la localització, juntament amb el fet que $\Sigma^i HG_i$ sigui f -local perquè és un retractive de $\bigvee_{k \in \mathbb{Z}} \Sigma^k HG_k$ (veure Lema 2.3.2), ens diu que $G_i = 0$ si $i \neq n$ o $i \neq n + 1$. Així doncs, la localització de la n -èsima suspensió d'un espectre d'Eilenberg–Mac Lane té com a màxim dos grups d'homotopia no trivials.

Teorema 4.4.2. *Sigui G un grup abelià i sigui $n \in \mathbb{Z}$. Llavors tenim una equivalència*

$$L\Sigma^n HG \simeq \Sigma^n HG_1 \vee \Sigma^{n+1} HG_2$$

com a $H\mathbb{Z}$ -mòduls, per a certs grups abelians G_1 i G_2 . Si G és un R -mòdul, llavors G_1 i G_2 també ho són. $\square$

Gràcies al Teorema 4.4.2 podem descriure la localització de qualsevol HR -mòdul en funció de la localització dels espectres d'Eilenberg–Mac Lane que ho formen.

Corol·lari 4.4.3. *Si $E \simeq \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} \Sigma^k HA_k$, llavors $LE \simeq \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} L\Sigma^k HA_k$.*

Demostració. L'espectre $\bigvee_{k \in \mathbb{Z}} L\Sigma^k HA_k$ és f -local, ja que l'aplicació natural

$$\bigvee_{k \in \mathbb{Z}} L\Sigma^k HA_k \longrightarrow \prod_{k \in \mathbb{Z}} L\Sigma^k HA_k$$

és una equivalència homotòpica i $\prod_{k \in \mathbb{Z}} L\Sigma^k HA_k$ és f -local. El Teorema 4.4.2 ens assegura que per a cada valor de k només un nombre finit de grups d'homotopia (de fet són dos com a màxim) són no nuls. L'aplicació

$$\bigvee_{k \in \mathbb{Z}} \Sigma^k HA_k \longrightarrow \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} L\Sigma^k HA_k$$

és una f -equivalència perquè és un *wedge* de f -equivalències. El resultat es dedueix de la unicitat homotòpica de la localització. $\square$

En alguns casos, la localització d'un espectre d'Eilenberg–Mac Lane HG té només un grup d'homotopia, per exemple quan G és un grup lliure. Aquest i altres resultats es descriuen amb més detall en el Capítol 6.

Capítol 5

Localització homològica d'espectres d'Eilenberg–Mac Lane

Les localitzacions homològiques, també anomenades localitzacions de Bousfield, van ser definides per primera vegada per Adams [Ada73]. Bousfield va desenvolupar la teoria de localitzacions homològiques, demostrant l'existència d'aquests functors primer en la categoria d'espais topològics [Bou75] i posteriorment en la categoria d'espectres [Bou79a]. Donat un espectre E , un functor de localització homològica respecte a E , que denotarem per L_E , és un functor idempotent que inverteix de manera universal les equivalències homològiques (respecte a la teoria d'homologia donada per E) transformant-les en equivalències homotòpiques. Les localitzacions homològiques són un cas particular de f -localitzacions; de fet, són nul·lificacions, i a més a més commuten amb la suspensió.

En [Bou79a] s'estudia el cas de les localitzacions $L_E X$ quan els espectres E i X són ambdós connectius. Aquestes localitzacions sempre són localitzacions en un conjunt de primers o complecions en un conjunt de primers, que depèn dels grups d'homotopia de E . Si algun dels espectres E o X no és connectiu, els resultats que s'obtenen són menys previsibles. Per exemple, si K denota l'espectre de la teoria K complexa i S és l'espectre de les esferes, llavors $L_K S$ té infinits grups d'homotopia no nuls en dimensions positives i negatives (veure [Rav84, Teorema 8.10]). Al final del capítol veurem una demostració alternativa d'aquest resultat, vàlida també per als espectres de Johnson–Wilson $E(n)$.

En aquest capítol desenvoluparem un estudi de les localitzacions homològi-

ques $L_E X$ en el cas que E sigui un espectre qualsevol i X sigui un HR -mòdul, on R és un anell amb unitat. Com a cas particular, obtindrem informació sobre localitzacions homològiques d'espectres d'Eilenberg–Mac Lane. Un estudi anàleg havia estat portat a terme per Bousfield en [Bou82] per a espais topològics. Els nostres resultats tradueixen els obtinguts per Bousfield al cas d'espectres.

En la primera secció recordarem les definicions i propietats més importants de les localitzacions homològiques. Després, veurem com la localització $L_E X$ d'un HR -mòdul X ve determinada per la localització dels espectres d'Eilenberg–Mac Lane que el formen i el conjunt de primers p per als quals l'espectre $H\mathbb{Z}/p$ no és acíclic respecte a E . Desenvoluparem alguns càlculs explícits de localitzacions respecte a diferents teories d'homologia i alguns exemples de càlculs concrets de $L_E HG$ per a diferents grups abelians G .

Posteriorment veurem una aplicació als functors de localització *smashing*, que són un tipus concret de localització homològica. Per a aquests functors, la localització d'un espectre es determina fent el producte *smash* d'aquest espectre amb la localització de l'espectre de les esferes. Demostrarem que per a aquesta classe de functors la localització de l'esfera té un únic grup d'homologia entera, que és a més un subanell dels racionals.

Acabarem el capítol amb una breu exposició sobre localitzacions cohomològiques. Aquestes localitzacions generalitzen les localitzacions homològiques, però la seva existència continua sent un problema obert [Hov95]. Els resultats continguts en aquest capítol es recullen en [Gut05b].

5.1 Localitzacions homològiques

Denotarem per Ho^s la categoria homotòpica estable. Les localitzacions homològiques van ser desenvolupades en la categoria homotòpica estable per Bousfield en [Bou79a]. Cada espectre E en la categoria homotòpica estable dóna lloc a una teoria d'homologia definida com a $E_k(X) = \pi_k(E \wedge X)$ per a qualsevol espectre X i per a tot $k \in \mathbb{Z}$. La localització homològica respecte de la teoria d'homologia E és un functor que transforma de manera universal les equivalències homològiques respecte a aquesta teoria d'homologia en equivalències homotòpiques.

Definició 5.1.1. Si E és un espectre, llavors:

- i) Un espectre X és E -acíclic si $E_k(X) = \pi_k(E \wedge X) = 0$ per a tot $k \in \mathbb{Z}$.
- ii) Una aplicació d'espectres $f: X \longrightarrow Y$ és una E -equivalència si l'aplicació induïda $f_k: E_k(X) \longrightarrow E_k(Y)$ és un isomorfisme per a tot $k \in \mathbb{Z}$.
- iii) Un espectre Z és E -local si cada E -equivalència $f: X \longrightarrow Y$ indueix una equivalència homotòpica $F(Y, Z) \simeq F(X, Z)$, o de manera equivalent, si $F(W, Z) = 0$ per a tot espectre W que sigui E -acíclic.

Una E -localització d'un espectre X és una E -equivalència

$$l_X: X \longrightarrow L_E X$$

on $L_E X$ és un espectre E -local. L'aplicació l_X es diu *aplicació de localització*.

Podem assignar a cada espectre X una localització homològica $L_E X$ de manera functorial. Denotarem per L_E a aquest functor, que anomenarem functor de E -localització. Aquesta construcció és universal en el sentit que l'aplicació de localització és inicial en Ho^s entre les aplicacions de X a espectres E -locals i és terminal entre totes les E -equivalències amb domini X . A més, el functor de localització és únic llevat d'homotopia.

Definició 5.1.2. Donat un espectre E , anomenem *classe de Bousfield* de E i la denotem per $\langle E \rangle$ a la classe d'equivalència formada per tots els espectres amb els mateixos espectres acíclics que E .

Les classes de Bousfield classifiquen els functors de localització homològica. Donats dos espectres E i F , els functors de E -localització i F -localització coincideixen si i només si ho fan les seves classes de Bousfield, és a dir, si i només si $\langle E \rangle = \langle F \rangle$.

L'existència d'un functor de E -localització per a cada espectre E va ser demostrada per Bousfield en [Bou79a, Teorema 1.1], on també es prova que la localització homològica és un cas particular de f -localització; en concret, és una nul·lificació [Bou79a, Lema 1.14].

Teorema 5.1.3. Donat un espectre E , existeix un altre espectre A tal que $L_E \simeq P_A$, on P_A denota el functor de A -nul·lificació. $\square$

5.2 Tipus d'aciclicitat i localització de mòduls

En aquesta secció estudiarem com els tipus de E -aciclicitat de l'espectre d'Eilenberg–Mac Lane $H\mathbb{Z}/p$ per a cada primer p i de l'espectre $H\mathbb{Q}$ determinen la localització $L_E X$ per a qualsevol espectre E i qualsevol HR -mòdul X . Aquesta localització dependrà dels primers p per als quals $E \wedge H\mathbb{Z}/p \neq 0$ i de si $E \wedge H\mathbb{Q} = 0$ o no.

Hem vist que els HR -mòduls són exactament els R -GEMs estables (Observació 4.3.5). Per tant, si E és un HR -mòdul, llavors

$$E \simeq \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} \Sigma^k H A_k,$$

on cada $A_k \cong \pi_k(E)$ és un R -mòdul. En el cas que $R = \mathbb{Z}$, els $H\mathbb{Z}$ -mòduls són els espectres de la forma $H\mathbb{Z} \wedge X$ (veure Corol·lari 4.3.4). Qualsevol HR -mòdul és un $H\mathbb{Z}$ -mòdul a través de l'aplicació $\mathbb{Z} \longrightarrow R$ que envia la unitat de $\mathbb{Z}$ a la unitat de R . L'espectre d'Eilenberg–Mac Lane HG és un HR -mòdul si G és un R -mòdul.

Donat un grup abelià G i un espectre E , denotem $EG = E \wedge MG$, on MG és l'espectre de Moore associat al grup G . Un diagrama commutatiu d'espectres de la forma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ h \downarrow & & \downarrow g \\ Z & \xrightarrow{i} & W \end{array}$$

és un *quadrat aritmètic* si existeix una aplicació $j: W \longrightarrow \Sigma X$ tal que

$$X \xrightarrow{(f,h)} Y \vee Z \xrightarrow{(g,-i)} W \xrightarrow{j} \Sigma X$$

és una cofibració d'espectres.

En [Bou79b], Bousfield va demostrar que donat qualsevol espectre E , la seva classe de Bousfield escindeix de la següent manera:

$$\langle E \rangle = \langle E\mathbb{Q} \rangle \vee \bigvee_{p \in \mathcal{P}} \langle E\mathbb{Z}/p \rangle, \quad (5.1)$$

on $\mathcal{P}$ és el conjunt de tots els nombres primers, és a dir, un espectre és E -acíclic si i només si és $E\mathbb{Q}$ -acíclic i $E\mathbb{Z}/p$ -acíclic per a tot primer p . Essencialment, aquest resultat ens diu que podem recuperar la localització $L_E X$ a partir de

la informació en cada primer $L_{E\mathbb{Z}/p}X$ i del coneixement del que succeeix racionalment $L_{E\mathbb{Q}}X$, com mostra el següent quadrat aritmètic [Bou79a, Proposició 2.9].

Teorema 5.2.1. *Donats dos espectres qualssevol E i X tenim un quadrat aritmètic*

$$\begin{array}{ccc} L_E X & \longrightarrow & \prod_{p \in \mathcal{P}} L_{E\mathbb{Z}/p} X \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_{E\mathbb{Q}} X & \longrightarrow & L_{E\mathbb{Q}} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} L_{E\mathbb{Z}/p} X \right), \end{array} \quad (5.2)$$

on $\mathcal{P}$ és el conjunt de tots els primers. □

En el cas racional, les $E\mathbb{Q}$ -localitzacions estan completament determinades en [Bou79a, Proposició 2.8]. Per a qualsevol espectre E , la localització $L_{E\mathbb{Q}}$ és sempre la racionalització. Més concretament, $L_{E\mathbb{Q}}X \simeq L_{M\mathbb{Q}}X \simeq X \wedge M\mathbb{Q}$ per a qualssevol espectres E i X .

Nosaltres ens centrarem en el càlcul de $L_{E\mathbb{Z}/p}X$ quan X és un HR -mòdul. Aquest càlcul dependrà dels tipus de E -aciclicitat per a l'espectre $H\mathbb{Z}/p$ en cada primer p . Observeu que si $\Sigma^i H\mathbb{Z}/p$ és E -acíclic per a algun $i \in \mathbb{Z}$ llavors $\Sigma^k H\mathbb{Z}/p$ és E -acíclic per a tot $k \in \mathbb{Z}$, ja que la localització homològica commuta amb la suspensió.

Proposició 5.2.2. *Si $H\mathbb{Z}/p$ és E -acíclic, llavors $L_{E\mathbb{Z}/p}X = 0$ per a qualsevol HR -mòdul X .*

Demostració. N'hi ha prou amb comprovar que $M\mathbb{Z}/p \wedge X$ és E -acíclic, ja que en aquest cas $E\mathbb{Z}/p \wedge X \simeq E \wedge M\mathbb{Z}/p \wedge X = 0$. L'espectre $M\mathbb{Z}/p \wedge X$ és $E\mathbb{Q}$ -acíclic i $E\mathbb{Z}/q$ -acíclic per a $q \neq p$ trivialment. Per a $q = p$ tenim que

$$M\mathbb{Z}/p \wedge X \wedge E\mathbb{Z}/p \simeq X' \wedge H\mathbb{Z} \wedge M\mathbb{Z}/p \wedge E\mathbb{Z}/p = 0$$

ja que X és en particular un $H\mathbb{Z}$ -mòdul i per tant escindeix com a $H\mathbb{Z} \wedge X'$, i a més $H\mathbb{Z} \wedge E\mathbb{Z}/p \simeq E \wedge H\mathbb{Z}/p = 0$. Fent servir ara la descomposició de (5.1) tenim que X és $E\mathbb{Z}/p$ -acíclic. □

Lema 5.2.3. *Si $H\mathbb{Z}/p$ no és E -acíclic i $f: X \longrightarrow Y$ és una $E\mathbb{Z}/p$ -equivalència, llavors és una $H\mathbb{Z}/p$ -equivalència.*

Demostració. Com que la localització homològica commuta amb la suspensió, si fem el producte *smash* de f amb un espectre qualsevol continua sent una $E\mathbb{Z}/p$ -equivalència (veure Teorema 3.2.6). En particular, si fem *smash* amb l'espectre $H\mathbb{Z}$, l'aplicació f indueix una equivalència homotòpica

$$E\mathbb{Z}/p \wedge H\mathbb{Z} \wedge X \simeq E\mathbb{Z}/p \wedge H\mathbb{Z} \wedge Y.$$

L'espectre $E\mathbb{Z}/p \wedge H\mathbb{Z} \simeq E \wedge H\mathbb{Z}/p$ és un $H\mathbb{Z}/p$ -mòdul, per tant els seus grups d'homotopia són espais vectorials sobre $\mathbb{Z}/p$ i escindeix com un *wedge* $\bigvee_{k \in I} \Sigma^k H\mathbb{Z}/p$ (en el conjunt d'índexs I pot haver enters repetits). Aquest *wedge* és no nul ja que per hipòtesi $E \wedge H\mathbb{Z}/p \neq 0$. Així doncs, f indueix una equivalència homotòpica

$$\bigvee_{k \in I} \Sigma^k H\mathbb{Z}/p \wedge X \simeq \bigvee_{k \in I} \Sigma^k H\mathbb{Z}/p \wedge Y,$$

i per tant f és en una $H\mathbb{Z}/p$ -equivalència. $\square$

El següent teorema ens permet calcular la localització $L_{E\mathbb{Z}/p}X$ per a espectres connectius o HR -mòduls X en el cas que l'espectre $H\mathbb{Z}/p$ no sigui E -acíclic.

Teorema 5.2.4. *Si $H\mathbb{Z}/p$ no és E -acíclic, llavors $L_{E\mathbb{Z}/p}X \simeq L_{M\mathbb{Z}/p}X$ per a qualsevol espectre X que sigui connectiu o un HR -mòdul.*

Demostració. Si X és un espectre connectiu llavors $L_{M\mathbb{Z}/p}X \simeq L_{H\mathbb{Z}/p}X$ (veure [Bou79a, Teorema 3.1]). L'aplicació $X \rightarrow L_{M\mathbb{Z}/p}X \simeq L_{H\mathbb{Z}/p}X$ és una $M\mathbb{Z}/p$ -equivalència, i per tant una $E\mathbb{Z}/p$ -equivalència. A més, l'espectre $L_{H\mathbb{Z}/p}X$ és $E\mathbb{Z}/p$ -local, ja que el Lema 5.2.3 ens diu que tot espectre $H\mathbb{Z}/p$ -local és $E\mathbb{Z}/p$ -local. Si X és un HR -mòdul, el resultat es segueix per l'argument anterior i la Proposició 5.2.6. $\square$

Podem calcular $L_{M\mathbb{Z}/p}X$ per a qualsevol espectre utilitzant el següent resultat [Bou79a, Proposició 2.5]:

Proposició 5.2.5. *Donat un espectre X qualsevol,*

$$L_{M\mathbb{Z}/p}X \simeq F(\Sigma^{-1}M\mathbb{Z}/p^\infty, X)$$

i tenim una successió exacta curta

$$0 \rightarrow \text{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, \pi_k(X)) \rightarrow \pi_k(L_{M\mathbb{Z}/p}X) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}/p^\infty, \pi_{k-1}(X)) \rightarrow 0,$$

que escindeix per a tot $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

En el cas particular que X sigui un espectre d'Eilenberg–Mac Lane HG , tenim que $L_{M\mathbb{Z}/p}HG \simeq HA \vee \Sigma HB$, on $A \cong \text{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, G)$ i $B \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}/p^\infty, G)$.

La propietat d'escisió dels HR -mòduls com a un *wedge* de suspensions d'espectres d'Eilenberg–Mac Lane, juntament amb el fet que les localitzacions homològiques commuten amb la suspensió, ens permet descriure les localitzacions homològiques d'un HR -mòdul a partir de les localitzacions dels espectres d'Eilenberg–Mac Lane que el formen.

Proposició 5.2.6. *Si X és un HR -mòdul tal que $X \simeq \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} \Sigma^k HA_k$, llavors $L_E X \simeq \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} \Sigma^k L_E HA_k$ per a qualsevol espectre E .*

Demostració. Com que el functor L_E commuta amb la suspensió, tenim que $L_E \Sigma^k HA_k \simeq \Sigma^k L_E HA_k$. El resultat es dedueix ara del Corol·lari 4.4.3. $\square$

Per tant, per a l'estudi de localitzacions homològiques de HR -mòduls podem restringir-nos al cas particular de la localització d'espectres d'Eilenberg–Mac Lane $L_E HG$. Com hem vist en el Teorema 4.4.2, aquesta localització tindrà com a màxim dos grups d'homotopia no trivials en dimensions zero i un. Gràcies al quadrat aritmètic de Bousfield, per conèixer $L_E HG$ és suficient determinar $L_{E\mathbb{Z}/p} HG$ per a tot primer p , ja que en el cas racional ja sabem que $L_{E\mathbb{Q}} HG \simeq H(\mathbb{Q} \otimes G)$ per a qualsevol espectre E .

Un grup abelià G es diu que és *únicament p -divisible* si per a tot $g \in G$ existeix un únic $h \in G$ tal que $g = ph$. Aquesta condició és equivalent a dir que $\mathbb{Z}/p \otimes G = 0$ i $\text{Tor}(\mathbb{Z}/p, G) = 0$.

Lema 5.2.7. *Per a qualsevol espectre E , el grup $\pi_k(E)$ és únicament p -divisible per a tot $k \in \mathbb{Z}$ si i només si $E\mathbb{Z}/p = 0$.*

Demostració. El resultat s'obté directament utilitzant la successió exacta curta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p \otimes \pi_k(E) \longrightarrow \pi_k(E\mathbb{Z}/p) \longrightarrow \text{Tor}(\mathbb{Z}/p, \pi_{k-1}(E)) \longrightarrow 0,$$

vàlida per a tot $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

Com a cas particular tenim que el grup abelià $(H\mathbb{Z})_k(E)$ és únicament p -divisible per a tot $k \in \mathbb{Z}$ si i només si $E \wedge H\mathbb{Z}/p = 0$. Observeu també que si $\pi_k(E)$ és únicament p -divisible, llavors $(H\mathbb{Z})_k(E)$ és únicament p -divisible.

Proposició 5.2.8. *Si $H\mathbb{Z}/p$ no és E -acíclic, llavors $L_{E\mathbb{Z}/p} HG = 0$ si i només si G és únicament p -divisible.*

Demostració. Si $L_{E\mathbb{Z}/p}HG = 0$, llavors $E \wedge H\mathbb{Z}/p \wedge MG = 0$. Com que $E \wedge H\mathbb{Z}/p$ és un $H\mathbb{Z}/p$ -mòdul,

$$E \wedge H\mathbb{Z}/p \wedge MG \simeq \bigvee_{k \in I} \Sigma^k H\mathbb{Z}/p \wedge MG = 0.$$

Per tant $H\mathbb{Z}/p \wedge MG \simeq M\mathbb{Z}/p \wedge HG = 0$ i G és únicament p -divisible pel Lema 5.2.7. D'altra banda, si G és únicament p -divisible, llavors $HG \wedge M\mathbb{Z}/p = 0$ pel Lema 5.2.7. Per tant $L_{E\mathbb{Z}/p}HG = 0$ $\square$

El Teorema 5.2.4 i la Proposició 5.2.8 ens permeten calcular la localització $L_{E\mathbb{Z}/p}HG$ depenent dels tipus de E -aciclicitat de $H\mathbb{Z}/p$. Si $H\mathbb{Z}/p$ és E -acíclic, llavors $L_{E\mathbb{Z}/p}HG = 0$. En el cas que $H\mathbb{Z}/p$ no sigui E -acíclic, llavors $L_{E\mathbb{Z}/p}HG \simeq L_{M\mathbb{Z}/p}HG$ si G no és únicament p -divisible i $L_{E\mathbb{Z}/p}HG = 0$ en altre cas. El quadrat aritmètic (5.2) en el cas que $X = HG$ és el següent:

$$\begin{array}{ccc} L_E HG & \longrightarrow & \prod_{p \in P} L_{E\mathbb{Z}/p} HG \\ \downarrow & & \downarrow \\ H(G \otimes \mathbb{Q}) & \longrightarrow & M\mathbb{Q} \wedge \left(\prod_{p \in P} L_{E\mathbb{Z}/p} HG \right) \end{array} \quad (5.3)$$

on P és el conjunt dels nombres primers p tals que $E \wedge H\mathbb{Z}/p \neq 0$ i G no és únicament p -divisible.

Teorema 5.2.9. *Siguin $A_p = \text{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, G)$, $B_p = \text{Hom}(\mathbb{Z}/p^\infty, G)$ i sigui P el conjunt de primers tals que $H\mathbb{Z}/p$ no és E -acíclic i G no és únicament p -divisible per a tot $p \in P$. Donat un espectre qualsevol E i un grup abelià G tenim el següent:*

i) *Si $H\mathbb{Q}$ és E -acíclic, llavors*

$$L_E HG \simeq \prod_{p \in P} (HA_p \vee \Sigma HB_p).$$

ii) *Si $H\mathbb{Q}$ no és E -acíclic, llavors tenim una cofibració d'espectres*

$$L_E HG \rightarrow H(G \otimes \mathbb{Q}) \vee \prod_{p \in P} (HA_p \vee \Sigma HB_p) \rightarrow M\mathbb{Q} \wedge \prod_{p \in P} (HA_p \vee \Sigma HB_p).$$

Demostració. El resultat és conseqüència de les Proposicions 5.2.2, 5.2.8, el Teorema 5.2.4 i el quadrat aritmètic (5.3). $\square$

5.3 Alguns exemples

En aquesta secció veurem com calcular la localització homològica d'un espectre d'Eilenberg–Mac Lane en alguns exemples concrets. En primer lloc calcularem $L_E HG$ per a algunes teories d'homologia E no connectives i qualsevol grup abelià G .

Localització respecte a la teoria K de Morava $K(n)$

Sigui $n \geq 0$, p un primer i $K(n)$ l'espectre que representa la n -èsima teoria K de Morava relativa al primer p . Si $n = 0$, llavors $K(0) = H\mathbb{Q} = M\mathbb{Q}$ i per tant $L_{K(0)} HG \simeq H(G \otimes \mathbb{Q})$. Per a $n \geq 1$, tenim que $\pi_*(K(n)) \cong \mathbb{Z}/p[v_n^{-1}, v_n]$, amb $|v_n| = 2(p^n - 1)$. En aquest cas, $K(n) \wedge M\mathbb{Q} = 0$ i $H\mathbb{Z}/p$ és $K(n)$ -acíclic per a tot primer p , ja que $K(n) \wedge H\mathbb{Z}/p = 0$ per a tot primer p (veure per exemple [Rav84, Teorema 2.1]). Per tant $L_{K(n)} HG = 0$ si $n \geq 1$.

Proposició 5.3.1. *Donat un HR -mòdul qualsevol X , la seva localització respecte a $K(n)$ és zero si $n > 0$ o és la racionalització si $n = 0$, és a dir, $L_{K(0)} X \simeq X \wedge M\mathbb{Q}$. $\square$*

Localització respecte a la teoria de Johnson–Wilson $E(n)$

La classe de Bousfield de la teoria d'homologia $E(n)$ es descompon com un *wedge* de teories K de Morava, $\langle E(n) \rangle = \bigvee_{i=0}^n \langle K(i) \rangle$ (veure [Rav84, Teorema 2.1]); per tant $L_{E(n)} HG \simeq L_{K(0)} HG \simeq H(G \otimes \mathbb{Q})$, ja que $L_{K(i)} HG = 0$ si $i \geq 1$.

Localització respecte a teoria K

L'espectre $H\mathbb{Z}/p$ és K -acíclic per a tot primer p i $K\mathbb{Q} \neq 0$, llavors $L_K HG \simeq H(G \otimes \mathbb{Q})$.

Proposició 5.3.2. *Donat un HR -mòdul qualsevol, la seva localització respecte a $E(n)$ o teoria K és la racionalització. $\square$*

En els exemples següents calcularem totes les possibles localitzacions homològiques de HG respecte a E per a alguns grups abelians G i algunes famílies de grups abelians concretes. Per a això farem servir el Teorema 5.2.9. Donat un espectre qualsevol E , i un grup abelià G , tenim les següents quatre condicions, que ens determinaran la localització $L_E HG$ completament:

- Condició I: $E\mathbb{Q} = 0$ i $E \wedge H\mathbb{Z}/p = 0$ per a tot primer p .
- Condició II: $E\mathbb{Q} \neq 0$ i $E \wedge H\mathbb{Z}/p = 0$ per a tot primer p .
- Condició III: $E\mathbb{Q} = 0$ i $E \wedge H\mathbb{Z}/p \neq 0$ per a tot p d'un conjunt de primers P .
- Condició IV: $E\mathbb{Q} \neq 0$ i $E \wedge H\mathbb{Z}/p \neq 0$ per a tot p d'un conjunt de primers P .

Localitzacions de $H\mathbb{Z}$

El grup abelià dels enters no és únicament p -divisible per a cap primer p . Si es compleix la Condició II, llavors $L_E H\mathbb{Z} \simeq H\mathbb{Q}$. D'altra banda,

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p^\infty, \mathbb{Z}) = 0 \quad \text{i} \quad \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, \mathbb{Z}) \cong \widehat{\mathbb{Z}}_p,$$

on $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ és l'anell dels enters p -àdics. Si es compleix la Condició III, llavors $L_E H\mathbb{Z} \simeq H(\prod_{p \in P} \widehat{\mathbb{Z}}_p)$. I si es compleix la Condició IV, prenent π_0 en (5.3), tenim el següent diagrama tipus *pullback* de grups abelians:

$$\begin{array}{ccc} \pi_0(L_E H\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \prod_{p \in P} \widehat{\mathbb{Z}}_p \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \otimes \prod_{p \in P} \widehat{\mathbb{Z}}_p \end{array}$$

on P és el conjunt de primers tals que $E \wedge H\mathbb{Z}/p \neq 0$. Per tant, $L_E H\mathbb{Z} \simeq H\mathbb{Z}_P$.

Localitzacions de $H\mathbb{Z}/p^k$ amb p primer

El grup abelià $\mathbb{Z}/p^k$ és únicament q -divisible per a tot $q \neq p$ i a més a més, $L_{E\mathbb{Q}} H\mathbb{Z}/p^k \simeq H(\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}/p^k) = 0$. També tenim que

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p^\infty, \mathbb{Z}/p^k) = 0 \quad \text{i} \quad \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, \mathbb{Z}/p^k) = \mathbb{Z}/p^k.$$

Així doncs $L_E H\mathbb{Z}/p^k = 0$ si es compleix la Condició II i $L_E H\mathbb{Z}/p^k \simeq H\mathbb{Z}/p^k$ si es compleix la Condició III o la IV.

Localitzacions de $H\mathbb{Q}$

El grup dels racionals és únicament p -divisible per a tot primer p , per tant $L_{E\mathbb{Z}/p}H\mathbb{Q} = 0$. Si es compleix la Condició III, llavors $L_E H\mathbb{Q} = 0$, i $L_E H\mathbb{Q} = H\mathbb{Q}$ si es satisfà la Condició II o la IV.

Localitzacions de $H\mathbb{Z}_R$ per a un conjunt de primers R

Per a tot primer $p \in R$ tenim que

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p^\infty, \mathbb{Z}_R) = 0 \quad \text{i} \quad \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, \mathbb{Z}_R) = \widehat{\mathbb{Z}}_p.$$

De fet, si G és un grup abelià lliure de torsió, llavors $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p^\infty, G) = 0$ i $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, G) = 0$ si i només si G és p -divisible. Si es compleix la Condició II, llavors $L_E H\mathbb{Z}_R \simeq H\mathbb{Q}$ perquè $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}_R \cong \mathbb{Q}$. Si es compleix la Condició III, llavors $L_E H\mathbb{Z}_R \simeq H(\prod_{p \in R \cap P} \widehat{\mathbb{Z}}_p)$. I si es compleix la Condició IV, llavors $L_E H\mathbb{Z}_R \simeq H\mathbb{Z}_{R \cap P}$, on P és el conjunt de tots els primers tals que $E \wedge H\mathbb{Z}/p \neq 0$. Observeu que aquest cas generalitza el cas de la localització de $H\mathbb{Z}$, quan $R = \emptyset$, i el de la localització de $H\mathbb{Q}$, quan R és el conjunt de tots els primers.

Localitzacions de $H\mathbb{Z}/p^\infty$

El grup $\mathbb{Z}/p^\infty$ és únicament q -divisible per a tot primer $q \neq p$. En aquest cas, $L_{E\mathbb{Q}} H\mathbb{Z}/p^\infty = 0$ ja que $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}/p^\infty = 0$. D'altra banda,

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p^\infty, \mathbb{Z}/p^\infty) = \widehat{\mathbb{Z}}_p \quad \text{i} \quad \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, \mathbb{Z}/p^\infty) = 0.$$

Així, si es compleix la Condició II, llavors $L_E H\mathbb{Z}/p^\infty = 0$. Si es compleix la Condició III, llavors $L_E H\mathbb{Z}/p^\infty \simeq \Sigma H\widehat{\mathbb{Z}}_p$. I si es compleix la Condició IV, llavors pel Teorema 5.2.9 tenim una cofibració d'espectres

$$L_E H\mathbb{Z}/p^\infty \rightarrow \Sigma H\widehat{\mathbb{Z}}_p \rightarrow \Sigma H\widehat{\mathbb{Q}}_p \rightarrow \Sigma H(\widehat{\mathbb{Q}}_p/\widehat{\mathbb{Z}}_p),$$

on $\widehat{\mathbb{Q}}_p \cong \widehat{\mathbb{Z}}_p \otimes \mathbb{Q}$ són els racionals p -àdics. Per tant $L_E H\mathbb{Z}/p^\infty \simeq H(\widehat{\mathbb{Q}}_p/\widehat{\mathbb{Z}}_p) \simeq H\mathbb{Z}/p^\infty$.

Localitzacions de $H\widehat{\mathbb{Z}}_p$

N'hi ha prou amb fixar-nos en el primer p , perquè $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ és únicament q -divisible per a tot primer $q \neq p$. En aquest cas tenim que

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p^\infty, \widehat{\mathbb{Z}}_p) = 0 \quad \text{i} \quad \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, \widehat{\mathbb{Z}}_p) = \widehat{\mathbb{Z}}_p.$$

Si es compleix la Condició II, llavors $L_E H\widehat{\mathbb{Z}}_p \simeq H\widehat{\mathbb{Q}}_p$. I si es compleix la Condició III o la IV, llavors $L_E H\widehat{\mathbb{Z}}_p \simeq H\widehat{\mathbb{Z}}_p$.

La següent taula resumeix els resultats de les localitzacions obtingudes per als diferents grups anteriors. El conjunt P és el conjunt de primers p tals que $H\mathbb{Z}/p$ no és E -acíclic.

	Condició I	Condició II	Condició III	Condició IV
$L_E H\mathbb{Z}$	0	$H\mathbb{Q}$	$\prod_{p \in P} H\widehat{\mathbb{Z}}_p$	$H\mathbb{Z}_P$
$L_E H\mathbb{Z}/p^k$	0	0	$H\mathbb{Z}/p^k$	$H\mathbb{Z}/p^k$
$L_E H\mathbb{Q}$	0	$H\mathbb{Q}$	0	$H\mathbb{Q}$
$L_E H\mathbb{Z}_R$	0	$H\mathbb{Q}$	$\prod_{p \in P \cap R} H\widehat{\mathbb{Z}}_p$	$H\mathbb{Z}_{P \cap R}$
$L_E H\mathbb{Z}/p^\infty$	0	0	$\Sigma H\widehat{\mathbb{Z}}_p$	$H\mathbb{Z}/p^\infty$
$L_E H\widehat{\mathbb{Z}}_p$	0	$H\widehat{\mathbb{Q}}_p$	$H\widehat{\mathbb{Z}}_p$	$H\widehat{\mathbb{Z}}_p$

Localització de HG quan G és un grup abelià finitament generat

Tot grup abelià finitament generat G escindeix com una suma directa finita $G \cong \bigoplus_{i=1}^n C_i$, on cada C_i és o bé $\mathbb{Z}$, o bé $\mathbb{Z}/p^k$ per a algun primer p i $k \geq 1$. Com que $HG \simeq \bigvee_{i=1}^n HC_i$, llavors $L_E HG \simeq \bigvee_{i=1}^n L_E HC_i$ i la localització de cada HC_i es determina utilitzant els resultats anteriors per a la localització de $H\mathbb{Z}$ i $H\mathbb{Z}/p^k$.

Localització de HG quan G és un grup abelià divisible

Tot grup abelià divisible escindeix com una suma directa de còpies de $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Z}/p^\infty$ per a diversos primers p . Si G és un grup abelià divisible, llavors $G \cong R \oplus T$, on $R = \bigoplus_i \mathbb{Q}$ i $T = \bigoplus_p (\bigoplus_{j_p} \mathbb{Z}/p^\infty)$. Per tant $L_E HG \simeq L_E HR \vee L_E HT$. Com que R és un retractive de $\prod_i \mathbb{Q}$, tenim que de $L_E HR \simeq HR$ o $L_E HR = 0$, depenent de si $H\mathbb{Q}$ és E -local o E -acíclic. La localització $L_E HT$ es pot determinar utilitzant la successió exacta de grups abelians

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_P \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \bigoplus_{p \in P} \mathbb{Z}/p^\infty \longrightarrow 0,$$

els resultats anteriors per a la localització de $H\mathbb{Z}/p^\infty$ i $H\mathbb{Z}_P$ i la propietat de la localització homològica de conservar cofibracions.

Localització de HG quan G és un grup reduït

En tots els casos estudiats anteriorment excepte en el cas de $H\mathbb{Z}/p^\infty$ totes les localitzacions homològiques de HG tenen com a màxim només un grup d'homotopia en dimensió zero. Aquesta propietat no només la compleixen els grups anteriors, sinó que també es verifica quan localitzem HG per a qualsevol grup abelià G que sigui reduït. Un grup abelià G es diu que és *reduït* si no té subgrups divisibles no trivials.

Teorema 5.3.3. *Si G és un grup abelià reduït i E és un espectre qualsevol, llavors $L_E HG \simeq HA$ per a algun A .*

Demostració. Si G és reduït, llavors $\text{Hom}(\mathbb{Z}/p^\infty, G) = 0$. El resultat es dedueix aplicant ara el Teorema 5.2.9. $\square$

Donat un grup abelià qualsevol G , sempre ho podem descompondre com a $G_1 \oplus G_2$, on G_1 és el subgrup divisible maximal de G i G_2 és reduït. D'altra banda, G_1 escindeix com a una suma directa de $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Z}/p^\infty$ per a diversos primers p . Per tant, pel Teorema 5.3.3 i els resultats anteriors sobre localitzacions homològiques de HG quan G és abelià divisible, l'única possibilitat perquè en la localització homològica d'un espectre d'Eilenberg–Mac Lane aparegui un grup d'homotopia en dimensió 1 és que $\mathbb{Z}/p^\infty$ aparegui com un factor de la descomposició del grup G i que $L_E H\mathbb{Z}/p^\infty \neq 0$.

Corol·lari 5.3.4. *Si $\mathbb{Z}/p^\infty$ no és un sumand directe de G per a cap primer p , llavors per a qualsevol espectre E es compleix que $L_E HG \simeq HA$ per a algun grup abelià A .* $\square$

5.4 Functors de localització *smashing*

Un functor de localització L és *smashing* quan la localització de qualsevol espectre ve determinada per la localització LS de l'espectre de les esferes. Més concretament, L és *smashing* si l'aplicació natural

$$1 \wedge l: X \longrightarrow X \wedge LS$$

és una localització per a tot espectre X , on $l: S \longrightarrow LS$ és l'aplicació de localització de l'espectre de les esferes. També es diu que un espectre E és

smashing quan el functor de localització L_E ho és [Rav84, Definició 1.28]. Si el functor L és *smashing*, llavors una aplicació $h: X \longrightarrow Y$ és una L -equivalència si

$$X \wedge LS \xrightarrow{h \wedge 1} Y \wedge LS$$

és una equivalència, és a dir, si

$$(LS)_k(X) \cong (LS)_k(Y) \quad \text{per a tot } k \in \mathbb{Z}.$$

D'aquesta manera podem veure que tota localització *smashing* L és una localització homològica $L = L_E$, on $E \simeq LS$ i per tant commuta amb la suspensió. A més a més, l'espectre LS és un espectre anell commutatiu, pel Teorema 4.2.1 i $LS \wedge LS \simeq LS$, perquè l'aplicació de multiplicació $LS \wedge LS \longrightarrow LS$ és inversa per l'esquerra de l'aplicació de localització $1 \wedge l: LS \longrightarrow LS \wedge LS$.

Recíprocament, si E és un espectre anell i l'aplicació de multiplicació $E \wedge E \longrightarrow E$ és una equivalència, llavors L_E és *smashing*. L'aplicació

$$\eta \wedge 1: S \wedge X \longrightarrow E \wedge X,$$

on η és la unitat de E , és una E -equivalència ja que $E \wedge E \simeq E$ i $E \wedge X$ és E -local perquè és un E -mòdul. Per tant, $E \simeq L_E S$ i $LX \simeq X \wedge L_E S$.

En [Rav84, Proposició 1.27] es demostra que un espectre E és *smashing* si i només si el functor L_E commuta amb límits directes. Això succeeix, per exemple, per al functor de localització homològica respecte a l'espectre de la teoria K o als espectres de Johnson–Wilson $E(n)$ per a qualsevol n .

Teorema 5.4.1. *Si L és un functor de localització smashing, $(H\mathbb{Z})_k(LS) = 0$ si $k \neq 0$ i és zero o un subanell dels racionals si $k = 0$.*

Demostració. Per a tot $k \in \mathbb{Z}$, tenim que

$$(H\mathbb{Z})_k(LS) \simeq \pi_k(H\mathbb{Z} \wedge LS) \cong \pi_k(LH\mathbb{Z}) \cong \pi_k(HA),$$

on A és un subanell dels racionals o un producte d'enters p -àdics per a diversos primers, com hem vist en la secció anterior. Per tant, si $k \neq 0$, llavors $(H\mathbb{Z})_k(LS) = 0$. Com que $LS \wedge LS \simeq LS$ per ser L *smashing*, el Teorema de Künneth 1.2.17, implica que

$$(H\mathbb{Z})_0(LS) \otimes (H\mathbb{Z})_0(LS) \cong (H\mathbb{Z})_0(LS) \quad \text{i} \\ \text{Tor}((H\mathbb{Z})_0(LS), (H\mathbb{Z})_0(LS)) = 0.$$

Així doncs, l'anell A és lliure de torsió i a més compleix que $A \otimes_{\mathbb{Z}} A \cong A$. Els anells que compleixen aquesta última condició es diuen *anells sòlids* [BK72b] i tots estan classificats. Segons aquesta classificació, l'única possibilitat és que A sigui un subanell dels racionals. $\square$

Corol·lari 5.4.2. *Si L és un functor de localització smashing que compleix que $(H\mathbb{Z})_0(LS) \cong \mathbb{Q}$, llavors o bé L és el functor de localització homològica respecte a $H\mathbb{Q}$, o LS té infinits grups d'homotopia no nuls en dimensions negatives.*

Demostració. Com que $LH\mathbb{Z} \simeq H\mathbb{Q}$, llavors $LS \wedge H\mathbb{Q} \simeq H\mathbb{Q}$ és diferent de zero. Això implica que $H\mathbb{Q}$ és L -local. Ara, la unitat $S \rightarrow H\mathbb{Q}$ factoritza a través de LS per la propietat universal de la localització, donant lloc a una aplicació $LS \rightarrow H\mathbb{Q}$ que és una equivalència en homologia $H\mathbb{Z}$, d'acord amb el teorema anterior. Si LS està acotat, llavors pel Corol·lari 5.4.2 tenim que $LS \simeq H\mathbb{Q}$ i així $LX \simeq X \wedge LS \simeq X \wedge H\mathbb{Q}$ per a tot X . $\square$

L'anell $H\mathbb{Z}_0(LS)$ és $\mathbb{Q}$ per exemple si L és el functor de localització homològica respecte a l'espectre K o a l'espectre $E(n)$ per a qualsevol n . Per a cadascun d'aquests dos casos, per la Proposició 5.3.1, aquestes localitzacions homològiques són la racionalització sobre HR -mòduls, i per tant

$$L_K H\mathbb{Z} \simeq L_{E(n)} H\mathbb{Z} \simeq H\mathbb{Q}.$$

Observació 5.4.3. El resultat anterior proporciona una demostració senzilla del fet que els espectres $L_K S$ i $L_{E(n)} S$ són no acotats (per al cas $L_K S$ ja havia estat demostrat en [Rav84, Teoremes 8.10 i 8.15]).

5.5 Localitzacions cohomològiques

Hem vist que cada espectre E en la categoria homotòpica estable dona lloc a una teoria d'homologia i una de cohomologia:

$$\begin{aligned} E_k(X) &= \pi_k(E \wedge X), \\ E^k(X) &= \pi_{-k}(F(X, E)) \end{aligned}$$

per a tot espectre X i tot $k \in \mathbb{Z}$. En la primera secció d'aquest capítol hem vist com es descriuen les localitzacions respecte a una teoria d'homologia.

Anàlogament a aquestes localitzacions es poden definir les localitzacions respecte a una teoria de cohomologia [Bou79c], [Hov95]. Donat un espectre E , una localització cohomològica respecte a E és una transformació idempotent que inverteix precisament les equivalències cohomològiques respecte a la teoria de cohomologia donada per E .

Definició 5.5.1. Si E és un espectre, llavors:

- i) Una aplicació d'espectres $f: X \longrightarrow Y$ és una E^* -equivalència si l'aplicació induïda $f^k: E^k(Y) \longrightarrow E^k(X)$ és un isomorfisme per a tot $k \in \mathbb{Z}$.
- ii) Un espectre X és E^* -acíclic si $E^k(X) = 0$ per a tot $k \in \mathbb{Z}$.
- iii) Un espectre Z és E^* -local si cada E^* -equivalència $f: X \longrightarrow Y$ induïx una equivalència homotòpica $F(Y, Z) \simeq F(X, Z)$, o equivalentment, si $F(W, Z) = 0$ per a tot espectre W que sigui E^* -acíclic.

Una E^* -localització d'un espectre X és una E^* -equivalència

$$l_X: X \longrightarrow L_{E^*}X$$

on $L_{E^*}X$ és un espectre E^* -local.

Les localitzacions homològiques són un cas particular de localització cohomològica. Donat un espectre E , els espectres E -acíclics coincideixen amb els espectres $(IE)^*$ -acíclics, on IE és el dual de Brown–Comenetz de E [Hov95, Proposició 1.1]. Les localitzacions cohomològiques també commuten amb la suspensió. No obstant això, l'existència de localitzacions cohomològiques per a un espectre qualsevol segueix sent un problema obert. Els articles de Bousfield [Bou79c] i Hovey [Hov95] presenten alguns avanços en aquesta direcció.

En [Bou79c], Bousfield demostra que si un espectre E compleix que els grups $\mathbb{Z}/p \otimes \pi_k(E)$ i $\text{Tor}(\mathbb{Z}/p, \pi_k(E))$ són finits per a tot $k \in \mathbb{Z}$ i per a tot primer p , llavors existeix la localització cohomològica respecte a E . Per demostrar aquest resultat es construeix un altre espectre G de tal manera que les G -equivalències siguin les mateixes que les E^* -equivalències i per tant la localització cohomològica respecte a E sigui una localització homològica (respecte a G), que ja se sap que existeix.

En aquesta línia es troba també la conjectura de Hovey [Hov95]. Hovey defineix la classe cohomològica de Bousfield d'un espectre E , que es denota per

$\langle E^* \rangle$, com la classe d'equivalència formada per tots els espectres tals que la seva cohomologia té els mateixos acíclics que E^* . Aquestes classes, d'igual manera que succeïa amb les classes de Bousfield homològiques (veure Definició 5.1.2) classifiquen els functors de localització cohomològics. Donats dos espectres E i F , llavors $L_{E^*}X = L_{F^*}X$ per a tot X si i només si $\langle E^* \rangle = \langle F^* \rangle$.

Conjectura de Hovey. Donat un espectre E , existeix un altre espectre X tal que $\langle E^* \rangle = \langle X \rangle$.

Aquesta conjectura és equivalent a dir que tota localització cohomològica és homològica, i per tant implicaria l'existència de les primeres.

Les localitzacions que commuten amb la suspensió comparteixen moltes de les propietats de les localitzacions homològiques. Cap preguntar-se si tota localització que commuta amb la suspensió és una localització homològica. Si aquest resultat fos cert, implicaria en particular la conjectura de Hovey i l'existència de localitzacions cohomològiques. Aquest és un problema que encara segueix obert.

Problema. Demostrar que tota localització que commuta amb la suspensió és una localització homològica.

Capítol 6

Localització homotòpica d'espectres d'Eilenberg–Mac Lane

La f -localització de la k -èsima suspensió de l'espectre d'Eilenberg–Mac Lane $\Sigma^k HG$, on G és un grup abelià qualsevol, és un GEM estable que té com a màxim dos grups d'homotopia en dimensions consecutives k i $k+1$ (veure Teorema 4.4.2). Anem a demostrar en aquest capítol que aquests dos grups d'homotopia satisfan certes condicions en relació amb G . Així, si $A = \pi_k(L_f \Sigma^k HG)$ i $B = \pi_{k+1}(L_f \Sigma^k HG)$, llavors

$$\mathrm{Hom}(A, A) \cong \mathrm{Hom}(G, A) \quad \text{i} \quad \mathrm{Hom}(A, B) \cong \mathrm{Hom}(G, B).$$

En alguns casos concrets, per exemple quan G és un grup abelià lliure o finitament generat, el segon d'aquests grups d'homotopia és nul.

En aquest capítol estudiarem f -localitzacions de $\Sigma^k HG$ quan G és finitament generat i ens centrarem en el cas particular de l'espectre $\Sigma^k H\mathbb{Z}$. Per a aquest espectre, descriurem totes les seves possibles f -localitzacions i veurem que $L_f \Sigma^k H\mathbb{Z} \simeq \Sigma^k HA$ on A és un anell caracteritzat per la propietat que l'aplicació

$$\mathrm{Hom}(A, A) \longrightarrow A$$

definida per $\varphi \mapsto \varphi(1)$ és un isomorfisme. Els anells amb aquesta propietat són anells commutatius, que es diuen *anells rígids*, i proporcionen una classe pròpia de functors de f -localització no equivalents. Tots els anells rígids s'obtenen com a f -localitzacions de l'espectre $H\mathbb{Z}$. La terminologia d'anells rígids apareix per primera vegada en [CRT00] per a descriure les f -localitzacions de

l'esfera S^1 , encara que els anells rígids ja havien estat estudiats anteriorment en altres contextos amb el nom de E -anells [Sch73].

Els conceptes algebraics d'anell rígid i anell sòlid [BK72b], es poden definir anàlogament per a espectres anell. Demostrarem que els espectres anell rígids en aquest context resulten ser les f -localitzacions de l'espectre de les esferes, mentre que els espectres anell sòlids són les localitzacions *smashing* de l'espectre de les esferes.

Veurem també que la localització de la suspensió d'un espectre d'Eilenberg–Mac Lane $\Sigma^k HG$ té com a màxim un grup d'homotopia en dimensió k quan el grup G és abelià reduït, és a dir, quan G no té cap subgrup divisible no trivial. Aquest resultat generalitza l'anàleg obtingut per a localitzacions homològiques (veure Teorema 5.3.3). Per a un grup abelià qualsevol G , el fet que en la localització de $\Sigma^k HG$ aparegui o no un segon grup d'homotopia dependrà únicament de si el grup de Prüfer $\mathbb{Z}/p^\infty$ apareix com a un sumand directe de G .

6.1 Espectres d'Eilenberg–Mac Lane f -locals

En aquesta secció presentarem alguns resultats sobre espectres d'Eilenberg–Mac Lane i f -localitzacions on f és una aplicació arbitrària d'espectres. Estudiarem de quina forma el fet que l'espectre $\Sigma^k HG$ sigui f -local ve determinat perquè ho siguin els espectres $\Sigma^k H\mathbb{Q}$ i $\Sigma^k H\mathbb{Z}/p^n$ per a cada primer p . Per simplicitat en la notació, ens centrarem el cas $k = 0$ (espectres de la forma HG), però tots els resultats són vàlids per a qualsevol $k \in \mathbb{Z}$ ajustant els índexs convenientment.

Un morfisme qualsevol de grups abelians $g: A \longrightarrow B$ indueix una aplicació de $H\mathbb{Z}$ -mòduls entre espectres d'Eilenberg–Mac Lane

$$Hg: HA \longrightarrow HB$$

tal que $\pi_0(Hg) = g$, ja que $\text{Hom}(A, B) \cong [HA, HB]_{H\mathbb{Z}\text{-}hmod}$. La seva fibra és també un $H\mathbb{Z}$ -mòdul, que escindeix de la següent manera:

$$\text{fib}(Hg) \simeq H(\text{Ker } g) \vee \Sigma^{-1}H(\text{Coker } g). \quad (6.1)$$

Aquest fet ens permet demostrar el següent resultat.

Lema 6.1.1. *Si HG és un espectre f -local, llavors també ho són els espectres HG_1 i $\Sigma^{-1}HG_2$ on $G_1 = \text{Hom}(A, G)$ i $G_2 = \text{Ext}(A, G)$ per a qualsevol grup abelià A .*

Demostració. Sigui una resolució lliure de A ,

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow F \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

on R i F són grups abelians lliures. Aquesta resolució dóna lloc a una successió exacta de grups

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(A, G) \longrightarrow \text{Hom}(F, G) \longrightarrow \text{Hom}(R, G) \longrightarrow \text{Ext}(A, G) \longrightarrow 0.$$

Com que R i F són lliures i HG és f -local, també ho són $H(\text{Hom}(F, G))$ i $H(\text{Hom}(R, G))$, ja que $\text{Hom}(F, G)$ i $\text{Hom}(R, G)$ són productes directes de còpies de G . Per tant, la fibra de l'aplicació

$$H(\text{Hom}(F, G)) \longrightarrow H(\text{Hom}(R, G)),$$

que és $H(\text{Hom}(A, G)) \vee \Sigma^{-1}H(\text{Ext}(A, G))$, també és f -local (veure Proposició 3.2.1). Els espectres HG_1 i $\Sigma^{-1}HG_2$ són f -locals perquè són retracts de la fibra. $\square$

Un grup abelià G es diu que és d'exponent finit si existeix un natural n tal que $nG = 0$, és a dir, per a tot g de G tenim que $ng = 0$. Un resultat clàssic de teoria de grups abelians diu que si G és d'exponent finit, llavors és suma directa de grups cíclics [Kap69]. Si G verifica que $p^n G = 0$ per a algun primer p i algun natural n , llavors G és suma directa de grups de la forma $\mathbb{Z}/p^j$, amb $1 \leq j \leq n$. Quan G compleix que $p^n G = 0$, l'espectre $H\mathbb{Z}/p^n$ detecta els espectres HG que són f -locals.

Lema 6.1.2. *Si $H\mathbb{Z}/p^n$ és f -local, llavors HG és f -local per a tot G tal que $p^n G = 0$.*

Demostració. Com que G és isomorf a una suma directa de grups cíclics $\mathbb{Z}/p^j$ amb $0 \leq j \leq n$, el podem escriure com el nucli d'una aplicació (no exhaustiva)

$$g: \prod_I \mathbb{Z}/p^n \longrightarrow \prod_J \mathbb{Z}/p^n,$$

que dóna lloc a la següent cofibració d'espectres, per (6.1):

$$HG \vee \Sigma^{-1}H(\text{Coker } g) \longrightarrow \prod_I H\mathbb{Z}/p^n \longrightarrow \prod_J H\mathbb{Z}/p^n.$$

La fibra és f -local perquè $H\mathbb{Z}/p^n$ ho és i el producte de f -locals és f -local. L'espectre HG és f -local perquè és un retractive de la fibra. $\square$

Donat un conjunt de primers J i un grup abelià G , es diu que G és *Ext- J -complet* si per a tot $p \in J$ tenim que $\text{Hom}(\mathbb{Z}/p, G) = \text{Ext}(\mathbb{Z}/p, G) = 0$, o equivalentment, $\mathbb{Z}/p \otimes G = \text{Tor}(\mathbb{Z}/p, G) = 0$. El grup G es diu *Ext-complet* si $\text{Hom}(\mathbb{Q}, G) = \text{Ext}(\mathbb{Q}, G) = 0$.

Corol·lari 6.1.3. *Si $H\mathbb{Z}/p^n$ és f -local per a tot n , llavors HA és f -local per a tot grup A que sigui Ext- p -complet.*

Demostració. Per a cada n , tenim la cofibració d'espectres

$$HA \xrightarrow{\times p^n} HA \longrightarrow H(A/p^n A)$$

que dona lloc a la següent torre de cofibracions

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ HA & \xrightarrow{\times p^3} & HA & \longrightarrow & H(A/p^3 A) \\ \times p \downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow \\ HA & \xrightarrow{\times p^2} & HA & \longrightarrow & H(A/p^2 A) \\ \times p \downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow \\ HA & \xrightarrow{\times p} & HA & \longrightarrow & H(A/pA). \end{array}$$

Si prenem el límit invers d'aquesta torre, obtenim que

$$HA \simeq \text{holim}_n H(A/p^n A).$$

El límit invers de la columna de l'esquerra és trivial, ja que A és Ext- p -complet (veure [BK72a, p.175]). Ara HA és el límit invers d'espectres f -locals pel Lema 6.1.2, i per tant és f -local (veure Lema 2.3.3). $\square$

Un grup abelià es diu racional si és un espai vectorial sobre $\mathbb{Q}$. Aquests grups escindeixen com a una suma directa de còpies de $\mathbb{Q}$. Per a grups abelians racionals es compleix el següent resultat.

Lema 6.1.4. *Si $H\mathbb{Q}$ és f -local, llavors HG és f -local per a tot grup abelià racional G .*

Demostració. Com que G és racional, el podem escriure com el nucli d'una aplicació (no exhaustiva)

$$g: \prod_I \mathbb{Q} \longrightarrow \prod_J \mathbb{Q}.$$

Tenim d'aquesta manera la següent cofibració d'espectres, per (6.1):

$$HG \vee \Sigma^{-1}H(\text{Coker } g) \longrightarrow \prod_I H\mathbb{Q} \longrightarrow \prod_J H\mathbb{Q}.$$

Com que la fibra és f -local per ser-ho $H\mathbb{Q}$, l'espectre HG també és f -local per ser un retracte de la fibra. $\square$

Observeu que si G és un grup abelià racional i HG és f -local, llavors $H\mathbb{Q}$ és f -local, ja que és un retracte de HG , perquè G és isomorf a una suma directa de còpies de $\mathbb{Q}$.

Lema 6.1.5. *Sigui P un conjunt de primers i suposem que $H\mathbb{Q}$ i $H\mathbb{Z}/p^n$ són f -locals per a tot $p \in P$ i per a tot n . Llavors, HG és f -local per a tot $\mathbb{Z}_P$ -mòdul G tal que $\text{Hom}(\mathbb{Z}/p^\infty, G) = 0$ per a cada $p \in P$.*

Demostració. Si G és un $\mathbb{Z}_P$ -mòdul, llavors G és únicament p -divisible per a cada $p \notin P$. Per tant la localització homològica $L_{M\mathbb{Z}/p}HG$ és zero per a tot $p \notin P$, per la Proposició 5.2.8. Aplicant el functor de localització homològica L_S a HG , el Teorema 5.2.1 ens dona el següent quadrat aritmètic

$$\begin{array}{ccc} HG & \longrightarrow & \prod_{p \in P} H(\text{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, G)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H(G \otimes \mathbb{Q}) & \longrightarrow & M\mathbb{Q} \wedge \prod_{p \in P} H(\text{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, G)). \end{array}$$

Els espectres dels vèrtexs inferiors del quadrat són f -locals pel Lema 6.1.4, ja que el seu grup d'homotopia és abelià racional. El mateix succeeix amb el vèrtex superior dret, aplicant el Corol·lari 6.1.3, ja que és un producte d'espectres d'Eilenberg–Mac Lane amb grups d'homotopia Ext - p -complets. Així doncs, HG és f -local. $\square$

Lema 6.1.6. *Si A és un grup abelià tal que $p^n A = p^{n+1} A$ per a algun n , llavors $A \cong B \oplus C$ on $p^n B = 0$ i C és p -divisible.*

Demostració. Tenim la següent successió exacta curta de grups abelians

$$0 \longrightarrow p^n A \longrightarrow A \longrightarrow A/p^n A \longrightarrow 0.$$

El grup $p^n A$ és p -divisible i $A/p^n A$ és d'exponent finit i per tant isomorf a una suma directa de còpies de $\mathbb{Z}/p^i$ amb $i \leq n$. Com que $\text{Ext}(A/p^n A, p^n A) = 0$, la successió exacta escindeix i per tant $A \cong A/p^n A \oplus p^n A$. $\square$

Lema 6.1.7. *Si A és un grup abelià que no és únicament p -divisible i $\Sigma H A$ és f -local, llavors HG és f -local per a tot grup G que sigui Ext- p -complet.*

Demostració. Realitzarem la demostració distingint diversos casos possibles per al grup abelià A . Considerem la successió de grups donada per $\{p^i A\}_{i \geq 1}$. Si aquesta successió no es fa constant, és a dir, $p^i A \not\cong p^{i+1} A$ per a cada $i \geq 1$, llavors tenim la següent successió exacta

$$A \xrightarrow{\times p^i} A \longrightarrow A/p^i A$$

i a més $A/p^i A \cong \bigoplus_{1 \leq j \leq i} \mathbb{Z}/p^j$ (observeu que, en aquesta descomposició, sempre apareix almenys una còpia de $\mathbb{Z}/p^i$, ja que sinó, $p^j A/p^i A = 0$ per a algun $j < i$, la qual cosa implicaria que $p^i A = p^j A$, que és una contradicció). Aquesta successió exacta induïx una cofibració d'espectres

$$\Sigma H(\text{Ker}(\times p^i)) \vee H(\bigoplus_{1 \leq j \leq i} \mathbb{Z}/p^j) \longrightarrow \Sigma H A \longrightarrow \Sigma H A.$$

Com que $\Sigma H A$ és f -local per hipòtesi, també ho és $H(\bigoplus_{1 \leq j \leq i} \mathbb{Z}/p^j)$ i per tant $H\mathbb{Z}/p^i$, ja que és un retractive de la fibra d'una aplicació entre espectres f -locals. Així doncs, tenim que per a tot $i \geq 1$ l'espectre $H\mathbb{Z}/p^i$ és f -local i podem aplicar el Corol·lari 6.1.3.

Si $\text{Hom}(\mathbb{Z}/p, A) \neq 0$, com que $\Sigma H A$ és f -local també ho és $\Sigma H\mathbb{Z}/p$ aplicant el Lema 6.1.1, degut al fet que $\text{Hom}(\mathbb{Z}/p, A)$ escindeix com una suma directa de còpies de $\mathbb{Z}/p$. Ara bé, també $H\mathbb{Z}/p$ és f -local ja que és la desuspensió d'un f -local, i procedint com en la demostració del Teorema 6.2.2, obtenim que $H\mathbb{Z}/p^i$ és f -local per a tot $i \geq 1$. La demostració acaba aplicant de nou el Corol·lari 6.1.3.

Finalment, suposem que existeix un $i \geq 1$ tal que $p^i A = p^{i+1} A$ i a més que $\text{Hom}(\mathbb{Z}/p, A) = 0$. En aquest cas, pel Lema 6.1.6, tenim que $A \cong B \oplus C$, on $p^i B = 0$ i C és p -divisible. Com que

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}/p, A) \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}/p, B) \oplus \text{Hom}(\mathbb{Z}/p, C)$$

i $\text{Hom}(\mathbb{Z}/p, A) = 0$, ha de complir-se que $\text{Hom}(\mathbb{Z}/p, B) = 0$, la qual cosa ens porta a una contradicció, perquè $p^i B = 0$ per hipòtesi. $\square$

Lema 6.1.8. *Donat un grup abelià A que no sigui Ext-complet, si $\Sigma H A$ és f -local, llavors $H\mathbb{Q}$ és f -local.*

Demostració. Si A no és Ext-complet, llavors o bé $\text{Hom}(\mathbb{Q}, A) \neq 0$ o bé $\text{Ext}(\mathbb{Q}, A) \neq 0$. Si $\text{Hom}(\mathbb{Q}, A) \neq 0$, llavors $\Sigma H(\text{Hom}(\mathbb{Q}, A))$ és f -local, pel Lema 6.1.2. Ara bé, la seva desuspensió també és local i racional, per tant $H\mathbb{Q}$ és f -local. El cas $\text{Ext}(\mathbb{Q}, A) \neq 0$ es demostra de la mateixa manera. $\square$

6.2 Alguns exemples. Localitzacions de $H\mathbb{Z}$

Donada una aplicació d'espectres f arbitrària, denotarem per L al functor de f -localització. En el Capítol 4 hem vist que la localització homotòpica LE d'un R -GEM estable E torna a ser un R -GEM estable. En el cas més senzill, si $E \simeq \Sigma^k HG$ amb G un R -mòdul i $k \in \mathbb{Z}$, llavors el Teorema 4.4.2 ens diu que LE té com a màxim dos grups d'homotopia no nuls en dimensions k i $k+1$, que també són R -mòduls. En algunes ocasions, el segon grup d'homotopia que apareix és nul i la localització de $\Sigma^k HG$ té un únic grup d'homotopia en dimensió k .

Teorema 6.2.1. *Si G és un grup abelià lliure i $k \in \mathbb{Z}$, llavors tenim que $L\Sigma^k HG \simeq \Sigma^k HA$ per a algun grup abelià A .*

Demostració. Pel Teorema 4.4.2 sabem que $L\Sigma^k HG$ té com a màxim dos grups d'homotopia en dimensions k i $k+1$. Suposem que $L\Sigma^k HG \simeq \Sigma^k HA \vee \Sigma^{k+1} HB$. Pel Corol·lari 4.3.6,

$$[\Sigma^k HG, \Sigma^{k+1} HB]_{H\mathbb{Z}\text{-}hmod} \cong \text{Ext}(G, B).$$

Si G és un grup lliure, llavors $\text{Ext}(G, B) = 0$ i en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^k HG & \xrightarrow{l} & \Sigma^k HA \vee \Sigma^{k+1} HB \\ & \searrow & \downarrow p_2 \\ & & \Sigma^{k+1} HB, \end{array}$$

les aplicacions són morfismes de $H\mathbb{Z}$ -mòduls i la composició

$$p_2 \circ l: \Sigma^k HG \longrightarrow \Sigma^{k+1} HB$$

és homotòpicament nul·la. A més $\Sigma^{k+1} HB$ és f -local perquè és un retractor de $L\Sigma^k HG$. Llavors, la propietat universal de la localització ens assegura que $B = 0$. $\square$

Teorema 6.2.2. *Si p és un nombre primer, n un enter positiu i $k \in \mathbb{Z}$, llavors $L\Sigma^k H\mathbb{Z}/p^n = 0$ o $L\Sigma^k H\mathbb{Z}/p^n \simeq \Sigma^k H\mathbb{Z}/p^i$ amb $1 \leq i \leq n$.*

Demostració. Suposem per simplicitat que $k = 0$. Si $k \in \mathbb{Z}$, es procedeix de manera anàloga. Començarem considerant el cas $n = 1$. Pel Teorema 4.4.2,

$$LH\mathbb{Z}/p \simeq HA_1 \vee \Sigma HA_2$$

on A_1 i A_2 són $\mathbb{Z}/p$ -mòduls, i per tant escindeixen com una suma directa de còpies de $\mathbb{Z}/p$. Com que desuspensions i retractes de locals són locals, es dedueix que, o bé $A_1 = A_2 = 0$, o bé $H\mathbb{Z}/p$ és f -local, en aquest cas $LH\mathbb{Z}/p = H\mathbb{Z}/p$. Si $A_1 = A_2 = 0$ llavors $LH\mathbb{Z}/p = 0$ i les cofibracions

$$H\mathbb{Z}/p \longrightarrow H\mathbb{Z}/p^r \longrightarrow H\mathbb{Z}/p^{r-1},$$

per a tot $r \geq 2$, impliquen inductivament que $LH\mathbb{Z}/p^r$ és contràctil per a tot $r \geq 1$, per la Proposició 3.2.5.

Segui ara n un enter positiu i suposem que $H\mathbb{Z}/p$ és f -local. De nou, utilitzant el Teorema 4.4.2, podem escriure

$$LH\mathbb{Z}/p^n \simeq HB_1 \vee \Sigma HB_2,$$

on ara B_1 i B_2 són $\mathbb{Z}/p^n$ -mòduls, és a dir, grups abelians amb exponent divisor de p^n . Per [Kap69], els grups B_1 i B_2 són suma directa de subgrups isomorfs a $\mathbb{Z}/p^j$, amb $1 \leq j \leq n$. Si $B_2 = 0$, llavors $\text{Hom}(B_1, B_1) \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}/p^n, B_1)$ per la propietat universal de L . Això força que B_1 consti només d'un sumand i que a més a més l'aplicació $\mathbb{Z}/p^n \longrightarrow B_1$ sigui exhaustiva (com en [Cas00, Teorema 3.4]). Finalment, suposem que B_2 és diferent de zero i arribarem a una contradicció. Segui m el menor nombre natural tal que $\mathbb{Z}/p^m$ és un sumand directe de B_2 . Llavors, $\Sigma H\mathbb{Z}/p^m$ i per tant $H\mathbb{Z}/p^m$ són f -locals. Ara bé, les cofibracions

$$H\mathbb{Z}/p^{(r+1)m} \longrightarrow H\mathbb{Z}/p^{rm} \longrightarrow \Sigma H\mathbb{Z}/p^m,$$

per a tot $r \geq 1$, impliquen inductivament que $H\mathbb{Z}/p^{rm}$ és f -local per a tot $r \geq 1$, per la Proposició 3.2.1. Triem doncs un r tal que $rm > n$ i aplicant el Lema 6.1.2 obtenim que $H\mathbb{Z}/p^n$ és f -local, la qual cosa és una contradicció. $\square$

Donat un grup abelià G finitament generat, el teorema de classificació d'aquests grups ens diu que podem expressar G com a $\bigoplus_{i=1}^n G_i$ on cada G_i és, o bé $\mathbb{Z}$, o bé $\mathbb{Z}/p^k$ per a algun primer p i algun $k \geq 1$. Com que el functor de localització commuta amb productes finits, si $G \cong \bigoplus_{i=1}^n G_i$, llavors aplicant els Teoremes 6.2.1 i 6.2.2,

$$L\Sigma^k HG \simeq \Sigma^k H(\bigoplus_{i=1}^n A_i)$$

on $A_i \cong \pi_k(L\Sigma^k HG_i)$.

Corol·lari 6.2.3. *Si G és un grup abelià finitament generat i $k \in \mathbb{Z}$, llavors $L\Sigma^k HG \simeq \Sigma^k HA$, per a algun grup abelià A .* $\square$

La localització no conserva grups abelians finitament generats, ja que alguns dels grups que apareixen com a grups d'homotopia de la localització de $H\mathbb{Z}$ no són finitament generats, com per exemple $\mathbb{Q}$.

Si $L\Sigma^k HG \simeq \Sigma^k HA \vee \Sigma^{k+1} HB$, podem obtenir informació sobre els dos grups d'homotopia A i B utilitzant la propietat universal de la localització. Com que $\Sigma^k HA$ i $\Sigma^{k+1} HB$ són locals per ser retractes de locals, projectant en cadascun dels factors tenim els següents diagrames:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^k HG & \xrightarrow{l} & \Sigma^k HA \vee \Sigma^{k+1} HB \\ & \searrow p_1 \circ l & \downarrow p_1 \\ & & \Sigma^k HA \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \Sigma^k HG & \xrightarrow{l} & \Sigma^k HA \vee \Sigma^{k+1} HB \\ & \searrow p_2 \circ l & \downarrow p_2 \\ & & \Sigma^{k+1} HB, \end{array}$$

que juntament amb la propietat universal de la localització ens donen els següents isomorfismes:

$$\begin{aligned} [\Sigma^k HA, \Sigma^k HA] \times [\Sigma^{k+1} HB, \Sigma^k HA] &\cong [\Sigma^k HG, \Sigma^k HA], \\ [\Sigma^k HA, \Sigma^{k+1} HB] \times [\Sigma^{k+1} HB, \Sigma^{k+1} HB] &\cong [\Sigma^k HG, \Sigma^{k+1} HB]. \end{aligned}$$

Però $[\Sigma^{k+1} HB, \Sigma^k HA] = 0$, ja que

$$[\Sigma^{k+1} HB, \Sigma^k HA] \cong (HA)^0(\Sigma HB) \cong \text{Hom}(\pi_0(\Sigma HB), A) = 0,$$

i per tant tenim els següents isomorfismes de grups abelians:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(A, A) &\cong \mathrm{Hom}(G, A), \\ \mathrm{Ext}(A, B) \oplus \mathrm{Hom}(B, B) &\cong \mathrm{Ext}(G, B).\end{aligned}$$

De la mateixa manera i fent servir el fet que $\Sigma^k HB$ també és local, ja que és la desuspensió d'un local, tenim l'isomorfisme

$$\mathrm{Hom}(A, B) \cong \mathrm{Hom}(G, B).$$

El següent resultat reuneix les tres propietats anteriors sobre els dos grups d'homotopia de la localització de $\Sigma^k HG$.

Proposició 6.2.4. *Si $L\Sigma^k HG \simeq \Sigma^k HA \vee \Sigma^{k+1} HB$, llavors per a tot $k \in \mathbb{Z}$ es compleix:*

- i) $\mathrm{Hom}(A, A) \cong \mathrm{Hom}(G, A)$.
- ii) $\mathrm{Hom}(A, B) \cong \mathrm{Hom}(G, B)$.
- iii) $\mathrm{Ext}(A, B) \oplus \mathrm{Hom}(B, B) \cong \mathrm{Ext}(G, B)$. □

En el cas particular de la localització de $\Sigma^k H\mathbb{Z}$, sabem que $B = 0$ pel Teorema 6.2.1. L'apartat i) de la Proposició 6.2.4 ens diu que $\mathrm{Hom}(A, A) \cong A$, i aquest isomorfisme ve donat per l'aplicació $\varphi \mapsto \varphi(1_A)$. La composició de morfismes en $\mathrm{Hom}(A, A)$ defineix una multiplicació en A per a la qual 1_A és l'element identitat. Així, si A és diferent de zero, llavors admet una estructura d'anell.

Definició 6.2.5. Un anell amb unitat es diu que és un *anell rígid* si l'aplicació evaluació $\mathrm{Hom}(A, A) \longrightarrow A$ donada per $\varphi \mapsto \varphi(1_A)$ és un isomorfisme.

Tots els anells rígids són commutatius. Si A és un anell rígid i $a \in A$, llavors els morfismes de $\mathrm{Hom}(A, A)$ definits com a

$$\varphi(r) = ra \quad \text{i} \quad \psi(r) = ar,$$

per a tot $r \in A$, verifiquen que $\varphi(1_A) = \psi(1_A)$. Per tant $ar = ra$ en A per a tot $r \in A$.

La terminologia d'anells rígids va ser utilitzada per primera vegada en [CRT00] per descriure les f -localitzacions de l'esfera S^1 . No obstant això, aquest tipus d'anells ja havia estat estudiat anteriorment en altres contextos, amb el nom de E -anells [Sch73]. Exemples d'anells rígids són $\mathbb{Z}/n$, els subanells de $\mathbb{Q}$ (incloent $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$) o l'anell dels enters p -àdics $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ per a qualsevol primer p . Hi ha molts altres exemples, com els productes $\prod_{p \in P} \mathbb{Z}/p$ o $\prod_{p \in P} \widehat{\mathbb{Z}}_p$, on P és un conjunt de primers. També són rígids tots els anells sòlids en el sentit de Bousfield–Kan [BK72b], és a dir, els anells R tals que la multiplicació $R \otimes_{\mathbb{Z}} R \longrightarrow R$ és un isomorfisme.

De fet, existeixen anells rígids de cardinalitat arbitràriament gran (veure [DMV87]). No obstant això, hi ha grups com el grup de Prüfer (o grup de les arrels p -èsimes de la unitat) $\mathbb{Z}/p^\infty$ o el cos p -àdic $\widehat{\mathbb{Q}}_p$ que no admeten una estructura d'anell rígid. Per tant, no existeix cap functor de localització tal que $\pi_k(L\Sigma^k H\mathbb{Z})$ sigui $\mathbb{Z}/p^\infty$ o $\widehat{\mathbb{Q}}_p$.

Teorema 6.2.6. *Donat $k \in \mathbb{Z}$, la localització de l'espectre $\Sigma^k H\mathbb{Z}$ té com a màxim un grup d'homotopia no trivial, és a dir, $L\Sigma^k H\mathbb{Z} \simeq \Sigma^k HA$, i si $A \neq 0$, llavors A té estructura d'anell rígid.* $\square$

Tots els anells rígids apareixen com a f -localitzacions de l'espectre $H\mathbb{Z}$. Donat un anell rígid A , sigui $f: S \longrightarrow MA$ l'aplicació d'espectres induïda per la unitat de A (recordeu que $[S, MA] \cong \pi_0(MA) = A$). Llavors $L_f H\mathbb{Z} \simeq HA$. L'espectre HA és f -local ja que pel Lema 3.4.1, $[\Sigma^k MA, HA] = \text{Hom}(A, A)$ si $k = 0$ i és nul en altre cas; per tant,

$$[\Sigma^k MA_k, HA] \cong [\Sigma^k S, HA] \quad \text{per a tot } k \geq 0.$$

L'aplicació $g: H\mathbb{Z} \longrightarrow HA$ obtinguda fent el producte *smash* de f amb la identitat en $H\mathbb{Z}$ és una f -equivalència, perquè $H\mathbb{Z}$ és connectiu. Observeu que també per a aquesta aplicació g es compleix que $L_g H\mathbb{Z} \simeq HA$.

Corol·lari 6.2.7. *Hi ha una classe pròpia de functors de f -localització no equivalents.*

Demostració. Hi ha una classe pròpia d'anells rígids no isomorfs per [DMV87]. Per a cadascun d'aquests anells rígids A , tenim un functor L_f associat, on $f: S \longrightarrow MA$, que compleix que $L_f H\mathbb{Z} \simeq HA$. $\square$

6.3 Espectres anell sòlids i rígids

En àlgebra, un anell amb unitat R es diu que és un anell sòlid en el sentit de [BK72b] si la multiplicació de l'anell $\mu: R \otimes_{\mathbb{Z}} R \longrightarrow R$ és un isomorfisme. Alguns exemples d'anells sòlids són $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{Z}/n$. No obstant això, $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ o $\mathbb{R}$ no són sòlids. Els anells sòlids estan completament classificats [BK72b] i tots són commutatius i numerables.

Donat un anell qualsevol R amb unitat, podem definir un functor de la categoria de grups abelians a la categoria de R -mòduls

$$F: Ab \longrightarrow R\text{-mod}$$

donat per $F(A) = A \otimes_{\mathbb{Z}} R$ per a tot grup abelià A . Aquest functor F és adjunt per l'esquerra del functor oblit de R -mòduls a $\mathbb{Z}$ -mòduls i proporciona per tant un isomorfisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B) \cong \mathrm{Hom}_R(A \otimes_{\mathbb{Z}} R, B)$$

per a tot grup abelià A i tot R -mòdul B . Quan l'anell R és un anell sòlid, el functor F és un functor idempotent, ja que $A \otimes_{\mathbb{Z}} R \otimes_{\mathbb{Z}} R \cong A \otimes_{\mathbb{Z}} R$. De fet, aquesta propietat caracteritza els anells sòlids.

Proposició 6.3.1. *Un anell R amb unitat és sòlid si i només si el functor $F: \mathbb{Z}\text{-mod} \longrightarrow R\text{-mod}$ definit com a $F(A) = A \otimes_{\mathbb{Z}} R$ és idempotent.*

Demostració. Si F és un functor idempotent, prenent $A = \mathbb{Z}$ tenim que

$$R \otimes_{\mathbb{Z}} R \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} R \otimes_{\mathbb{Z}} R = F(F(\mathbb{Z})) \cong F(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} R \cong R$$

i per tant $R \cong R \otimes_{\mathbb{Z}} R$. □

Quan un anell R és rígid (veure Definició 6.2.5), l'aplicació $\eta: \mathbb{Z} \longrightarrow R$ donada per $\eta(1) = 1_R$ té la següent propietat universal: donada qualsevol altra aplicació $g: \mathbb{Z} \longrightarrow R$ existeix una única $h: R \longrightarrow R$ tal que $g = h \circ \eta$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\eta} & R \\ g \downarrow & \swarrow h & \\ R & & \end{array}$$

És a dir, l'aplicació η és una localització de $\mathbb{Z}$ en la categoria de grups abelians. Els anells rígids estan caracteritzats per aquesta propietat.

Proposició 6.3.2. *Un anell R amb unitat és rígid si i només si l'aplicació $\eta: \mathbb{Z} \longrightarrow R$ donada per $\eta(1) = 1R$ és una localització de $\mathbb{Z}$ en la categoria de grups abelians.* $\square$

Tot anell sòlid és un anell rígid, ja que, si R és sòlid, llavors

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, R) \cong \mathrm{Hom}_R(R \otimes_{\mathbb{Z}} R, R) \cong \mathrm{Hom}_R(R, R) \cong R.$$

Anàlogament a la definició algebraica d'anells sòlids i rígids, podem definir espectres anell sòlids i espectres anell rígids. Les propietats d'aquests espectres anell són, com veurem, similars a les dels seus anàlegs algebraics.

Definició 6.3.3. Un espectre anell E és un *espectre anell sòlid*, si la multiplicació $E \wedge E \longrightarrow E$ és una equivalència homotòpica.

Observeu que tot espectre anell sòlid E és *smashing* (veure Secció 5.4) o dit d'una altra manera, el functor de localització homològica L_E és *smashing*. Exemples d'espectres sòlids són K , $E(n)$ per a tot n , o HR per a R un subanell dels racionals. Els espectres anells sòlids vénen caracteritzats per la següent propietat.

Proposició 6.3.4. *Un espectre anell E és sòlid si i només si el functor $L: Ho^s \longrightarrow Ho^s$ definit com a $LX = X \wedge E$ per a tot espectre X és un functor de localització.*

Demostració. Suposem que E és sòlid, llavors $L = L_E$, on $E \simeq S \wedge E = LS$ ja que les L -equivalències són precisament les E -equivalències. Recíprocament, si L és un functor de localització, $E = LS$ és local i per tant $E \simeq LE = E \wedge E$. $\square$

Definició 6.3.5. Un espectre anell E és un *espectre anell rígid* si l'aplicació d'evaluació $F^c(E, E) \longrightarrow E^c$ és una equivalència homotòpica.

Aquests espectres rígids vénen caracteritzats per ser exactament localitzacions de l'espectre de les esferes.

Proposició 6.3.6. *Un espectre anell E és rígid si i només si l'aplicació identitat de l'anell $\eta: S \longrightarrow E$ és una localització de l'esfera.*

Demostració. Si E és rígid, llavors $F^c(E, E) \simeq E^c \simeq F^c(S, E)$. De fet, $L_\eta S \simeq E$ ja que η és una η -equivalència i E és η -local. Recíprocament, si E és local,

també ho és $\Sigma^{-k}E$ per a tot $k \geq 0$. Com que η és una localització, la propietat universal

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\eta} & E \\ \downarrow & \nearrow & \\ \Sigma^{-k}E & & \end{array}$$

implica que

$$[S, \Sigma^{-k}E] \cong [E, \Sigma^{-k}E] \quad \text{per a tot } k \geq 0,$$

i així, $F^c(E, E) \simeq E^c$. □

Proposició 6.3.7. *Tot espectre anell sòlid és un espectre anell rígid.*

Demostració. Si E és sòlid, el functor $LX = X \wedge E$ és una localització per a tot espectre X . Prenent $X = S$ i fent servir la propietat universal de la localització tenim que $F(E, E) \simeq F(S, E) \simeq E$. □

Exemple 6.3.8. L'espectre anell $H\widehat{\mathbb{Z}}_p$ és rígid però no sòlid. Si fos sòlid, llavors $H\widehat{\mathbb{Z}}_p \wedge H\widehat{\mathbb{Z}}_p \simeq H\widehat{\mathbb{Z}}_p$, que a nivell de π_0 implicaria que $\widehat{\mathbb{Z}}_p \otimes \widehat{\mathbb{Z}}_p \cong \widehat{\mathbb{Z}}_p$, que no és cert. En canvi, es compleix que $[S, H\widehat{\mathbb{Z}}_p] \cong [H\widehat{\mathbb{Z}}_p, H\widehat{\mathbb{Z}}_p]$ i $[\Sigma^k H\widehat{\mathbb{Z}}_p, H\widehat{\mathbb{Z}}_p] = 0$ per a tot $k \geq 1$.

En homotopia inestable, totes les f -localitzacions de l'esfera S^1 són espais d'Eilenberg–Mac Lane i el seu grup d'homotopia té l'estructura d'un anell rígid [CRT00]. Tots els anells rígids apareixen d'aquesta manera. El següent teorema mostra la relació entre les localitzacions dels espectres S i $H\mathbb{Z}$, i les estructures d'espectre anell sòlid i rígid.

Teorema 6.3.9. *Sigui L_f un functor de f -localització qualsevol. Llavors:*

- i) *$L_f S$ és un espectre anell rígid i tots els espectres anell rígids apareixen d'aquesta manera. Si L_f és un functor de localització smashing, llavors $L_f S$ és un espectre anell sòlid i tots els espectres anell sòlids apareixen d'aquesta manera.*
- ii) *$L_f H\mathbb{Z} \simeq HA$ per a algun grup abelià A que té estructura d'anell rígid i tots els anells rígids apareixen d'aquesta manera. Si L_f és un functor de localització smashing, llavors A és un subanell dels racionals.*

Demostració. La primera part és conseqüència de les Proposicions 6.3.4 i 6.3.6. La segona és conseqüència dels Teoremes 5.4.1 i 6.2.6. □

6.4 Espectres d'Eilenberg–Mac Lane reduïts

Un grup abelià A es diu que és *reduït* si no posseeix cap subgrup no trivial que sigui divisible. Un espectre d'Eilenberg–Mac Lane HG diem que és reduït quan G és reduït. Veurem que la localització d'espectres d'Eilenberg–Mac Lane amb grup d'homotopia reduït té també com a màxim un sol grup d'homotopia no nul.

Teorema 6.4.1. *Si G és un grup abelià reduït, llavors $L\Sigma^k HG \simeq \Sigma^k HA$, per a algun grup abelià A i per a tot $k \in \mathbb{Z}$.*

Demostració. Per simplicitat, sigui $k = 0$. Per a la resta de casos es procedeix d'igual manera. Suposem que $LHG \simeq HA \vee \Sigma HB$ i sigui P el conjunt de primers p tals que B no és únicament p -divisible. Ja sabem que ΣHB és local, perquè és retracte d'un local. Pel Lema 6.1.7, els espectres $H(\prod_{p \in P} \text{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, G))$ i $H\mathbb{Z}/p^k$ per a tot $k < \infty$ i $p \in P$ són f -locals (observeu que $H\mathbb{Z}/p^k$ és Ext- P -complet [BK72a, p.174]). Podem distingir ara dos casos diferents:

- i) Suposem que B és Ext- P -complet. Per la propietat universal del functor de localització L tenim el següent diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc} HG & \xrightarrow{l} & HA \vee \Sigma HB \\ & \searrow l' & \downarrow \varphi \\ & & \widehat{HG}_P. \end{array}$$

on l és l'aplicació de localització donada pel functor L i l' és l'aplicació donada pel functor de localització homològica respecte a $M(\oplus_{p \in P} \mathbb{Z}/p)$. Observeu que $\widehat{HG}_P \simeq H(\prod_{p \in P} \text{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, G))$. Com que ΣHB és L -local i també és $M(\oplus_{p \in P} \mathbb{Z}/p)$ -local, aplicant les propietats universals de la localització tenim isomorfismes

$$\begin{aligned} [HG, \Sigma HB] &\cong [HA \vee \Sigma HB, \Sigma HB] \quad \text{i} \\ [HG, \Sigma HB] &\cong [H\widehat{G}_P, \Sigma HB], \end{aligned}$$

on $\widehat{G}_P = \prod_{p \in P} \text{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, G)$, que donen lloc a un isomorfisme

$$[HA \vee \Sigma HB, \Sigma HB] \cong [H\widehat{G}_P, \Sigma HB].$$

Per tant, $[HB, HB] \cong \text{Hom}(B, B) = 0$ i així $B = 0$.

- ii) Suposem que B no és $\text{Ext-}P$ -complet. El Lema 6.1.8 implica que $H\mathbb{Q}$ és L -local i pel Lema 6.1.5, $H(G \otimes \mathbb{Z}_P)$ és també L -local. Procedint ara d'igual manera que en el cas anterior però sent l' la localització homològica respecte a $M\mathbb{Z}_P$ obtenim que $B = 0$.

□

Tot grup abelià G escindeix com una suma directa $G_1 \oplus G_2$, on G_1 és un grup abelià divisible i G_2 és un grup abelià reduït. Per tant, $LHG \simeq LHG_1 \vee LHG_2$. La part de la localització corresponent a HG_2 consta com a màxim d'un grup d'homotopia, com hem vist en el Teorema 6.4.1. El grup G_1 el podem descompondre com a una suma directa de còpies de $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Z}/p^\infty$ per a diversos primers p . La localització d'un espectre d'Eilenberg–Mac Lane racional torna a ser un altre espectre d'Eilenberg–Mac Lane racional; per tant, l'única possibilitat de que en la localització d'un espectre d'Eilenberg–Mac Lane LHG aparegui un grup d'homotopia no nul en dimensió un és que $\mathbb{Z}/p^\infty$ aparegui com a sumand directe de G i que $LH\mathbb{Z}/p^\infty = \Sigma HB$ per a algun grup abelià B diferent de zero.

Vegem un exemple concret. Donat un $k < \infty$, sigui $f: H\mathbb{Z}/p^\infty \rightarrow \Sigma H\mathbb{Z}/p^k$ l'aplicació de $H\mathbb{Z}$ -mòduls donada per la identitat en el grup abelià $\text{Ext}(\mathbb{Z}/p^\infty, \mathbb{Z}/p^k)$. Com que f és trivialment una f -equivalència i $\Sigma H\mathbb{Z}/p^k$ és f -local, llavors $L_f H\mathbb{Z}/p^\infty \simeq \Sigma H\mathbb{Z}/p^k$. El mateix exemple canviant $H\mathbb{Z}/p^k$ per $H\widehat{\mathbb{Z}}_p$ ens permet obtenir una aplicació g tal que $L_g H\mathbb{Z}/p^\infty \simeq \Sigma H\widehat{\mathbb{Z}}_p$.

Corol·lari 6.4.2. *Sigui G un grup abelià qualsevol i $k \in \mathbb{Z}$. Si $\mathbb{Z}/p^\infty$ no apareix com a sumand directe de G per a cap primer p , llavors $L\Sigma^k HG \simeq \Sigma^k HA$ per a algun grup abelià A .*

□

Bibliografia

- [AR94] J. Admek i J. Rosický, *Locally Presentable and Accessible Categories*. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 189. Cambridge University Press, 1994.
- [Ada61] J. F. Adams, The sphere, considered as an H -space mod p . *Quart. J. Math. Oxford. Ser. (2)* **12** (1961), pp. 52–60.
- [Ada73] J. F. Adams, *Mathematical Lectures*. University of Chicago (1973).
- [Ada74] J. F. Adams, *Stable Homotopy and Generalised Homology*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, London, 1974.
- [AF74] F. W. Anderson i K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 13. Springer-Verlag, New York, 1974.
- [BW85] M. Barr i C. Wells, *Toposes, Triples and Theories*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, band 278. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [Bas03] G. Bastardas, Localitzacions i complecions d'espais anesfèrics. Tesi doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, 2003.
- [Baz01] B. Badzioch, Recognition principle for generalized Eilenberg–Mac Lane spaces. *Cohomological Methods in Algebraic Topology (Barcelona, 1998)*, pp. 207–220, *Progress in Mathematics*, vol. 196. Birkhäuser, Basel, 2001.
- [BM03] C. Berger e I. Moerdijk, Axiomatic homotopy theory for operads. *Comment. Math. Helv.* **78** (2003), no. 4, pp. 805–831.

- [Boa64] J. M. Boardman, Ph.D. Thesis, University of Cambridge, 1964.
- [BV73] J. M. Boardman i R. M. Vogt, *Homotopy Invariant Algebraic Structures on Topological Spaces*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 347. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1973.
- [Bor94] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra. Basic Category Theory*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 50. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [Bou74] A. K. Bousfield, Types of acyclicity. *J. Pure Appl. Algebra* **4** (1974), pp. 293–298.
- [Bou77] A. K. Bousfield, Constructions of factorization systems in categories. *J. Pure Appl. Algebra* **9** (1976/77), no. 2, pp. 207–220.
- [Bou75] A. K. Bousfield, The localization of spaces with respect to homology. *Topology* **14** (1975), no. 14, pp. 133–150.
- [Bou79a] A. K. Bousfield, The localization of spectra with respect to homology. *Topology* **18** (1979), no. 18, pp. 257–281.
- [Bou79b] A. K. Bousfield, The Boolean algebra of spectra. *Comment. Math. Helv.* **54** (1979), no. 3, pp. 368–377.
- [Bou79c] A. K. Bousfield, Cohomological localization of spaces and spectra. *No publicado*, 1979.
- [Bou82] A. K. Bousfield, On homology equivalences and homological localizations of spaces, *Amer. J. Math.* **104** (1982), pp. 1025–1042.
- [Bou94] A. K. Bousfield, Localization and periodicity in unstable homotopy theory, *J. Amer. Math. Soc.* **7** (1994), pp. 831–873.
- [Bou96] A. K. Bousfield, Unstable localization and periodicity. *Algebraic Topology: New Trends in Localization and Periodicity (Sant Feliu de Guixols, 1994)*, pp. 33–50, *Progress in Mathematics*, vol. 136. Birkhäuser, Basel, 1996.
- [Bou97] A. K. Bousfield, Homotopical localizations of spaces, *Amer. J. Math.* **119** (1997), pp. 1321–1354.

- [BF78] A. K. Bousfield i E. M. Friedlander, Homotopy theory of Γ -spaces, spectra, and bisimplicial sets. *Geometric Applications of Homotopy Theory (Evanston, 1977)*, II, pp. 80–130, *Lecture Notes in Mathematics* vol. 658. Springer, Berlin, 1978.
- [BK72a] A. K. Bousfield i D. M. Kan, *Homotopy Limits, Completions and Localizations*. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 304. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1972.
- [BK72b] A. K. Bousfield i D. M. Kan, The core of a ring. *J. Pure Appl. Algebra* **2** (1972), pp. 73–81.
- [Bro63] E. H. Brown, Jr., Cohomology theories. *Ann. of Math. (2)* **75** (1962), pp. 467–484; Correction: *Ann. of Math. (2)* **78** (1963), p. 201.
- [Cas94] C. Casacuberta, Recent advances in unstable localization. *The Hilton Symposium 1993*, pp. 1–22, CRM Proceedings Lecture Notes, vol. 6. American Mathematical Society, Providence, 1994.
- [Cas00] C. Casacuberta, On structures preserved by idempotent transformations of groups and homotopy types. *Crystallographic Groups and Their Generalizations (Kortrijk, 1999)*, pp. 39–68, *Contemporary Mathematics*, vol. 262. American Mathematical Society, Providence, 2000.
- [CC04] C. Casacuberta i B. Chorny, Generators for homotopical localizations in model categories. En preparacin.
- [CG05] C. Casacuberta i J. J. Gutirrez, Homotopical localizations of module spectra. *Trans. Amer. Math. Soc.* **357** (2005), no. 7, 2753–2770
- [CGMV06] C. Casacuberta, J. J. Gutirrez, I. Moerdijk i R. M. Vogt, Localization of algebras over coloured operads. Prepublicació, 2006.
- [CR97] C. Casacuberta i J. L. Rodriguez, On towers approximating homological localizations. *J. London Math. Soc. (2)* **56** (1997), no. 3, pp. 645–65.
- [CRT00] C. Casacuberta, J. L. Rodriguez i J.-Y. Tai, Localizations of abelian Eilenberg–Mac Lane spaces of finite type. Prepublicació, 2000.
- [CS01] C. Casacuberta i D. Scevenels, On the existence of group localizations under large-cardinal axioms. *RACSAM* **95** (2001), no. 2, pp. 163–170.

- [CSS04] C. Casacuberta, D. Scevenels i J. H. Smith, Implications of large-cardinal principles in homotopical localization. Aceptado en *Adv. Math.*
- [DHS88] E. S. Devinatz, M. J. Hopkins i J. H. Smith, Nilpotence and stable homotopy theory I. *Ann. of Math.* (2) **128** (1988), no. 2, pp. 207–241.
- [DHKS04] W. G. Dwyer, P. S. Hirschhorn, D. M. Kan i J. H. Smith, Homotopy Limit Functors on Model Categories and Homotopical Categories. Prepublicació, 2004.
- [DMV87] M. Dugas, A. Mader i C. Vinsonhaler, Large E -rings exist. *J. Algebra* **108** (1987), pp. 88–101.
- [DP01] W. G. Dwyer i J. H. Palmieri, Ohkawa's theorem: there is a set of Bousfield classes. *Proc. Amer. Math. Soc.* **129** (2001), no. 3, pp. 881–886.
- [EKMM97] A. D. Elmendorf, I. Kriz, M. A. Mandell i J. P. May, *Rings, Modules, and Algebras in Stable Homotopy Theory*. Mathematical Surveys and Monographs, 47. American Mathematical Society, Providence, 1997.
- [Far96] E. Dror Farjoun, *Cellular Spaces, Null Spaces and Homotopy Localization*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1622. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1996.
- [Fre37] H. Freudenthal, Über die Klassen der Sphärenabbildungen I. *Composito Math.* **5** (1937), pp. 299–314.
- [GU71] P. Gabriel i F. Ulmer, *Lokal Präsentierbare Kategorien*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 221. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1971.
- [GZ67] P. Gabriel i M. Zisman, *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, band 35 Springer-Verlag, New York, 1967.
- [GM95] J. P. C. Greenlees i J. P. May, Completions in algebra and topology. *Handbook of Algebraic Topology*, pp. 255–276, North-Holland, Amsterdam, 1995.
- [GNPR04] F. Guilln, V. Navarro, P. Pascual i A. Roig, Moduli spaces and formal operads. Prepublicació, 2004.

- [Gut05a] J. J. Gutirrez, Strict modules and homotopy modules in stable homotopy. *Homology Homotopy Appl.* **7** (2005), no. 1, pp. 39–49.
- [Gut05b] J. J. Gutirrez, Homological localizations of Eilenberg–Mac Lane spectra. Prepublicació math.AT/0511412 , 2006.
- [Gut06] J. J. Gutirrez, Cellularization and nullification of structures in triangulated categories. Prepublicació, 2006.
- [HMR75] P. Hilton, G. Mislin i J. Roitberg, *Localization of Nilpotent Groups and Spaces*. North-Holland Mathematics Studies, vol. 15. American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1975.
- [Hir03] P. S. Hirschhorn, *Model Categories and their Localizations*. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 99. American Mathematical Society, Providence, 2003.
- [HS98] M. J. Hopkins i J. H. Smith, Nilpotence and stable homotopy theory II. *Ann. of Math.* (2) **148** (1998), no. 1, pp. 1–49.
- [Hov95] M. Hovey, Cohomological Bousfield classes. *J. Pure Appl. Algebra* **103** (1995), no. 1, pp. 45–59.
- [Hov99] M. Hovey, *Model Categories*. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 63. American Mathematical Society, Providence, 1999.
- [HPS97] M. Hovey, J. H. Palmieri i N. P. Strickland, *Axiomatic Stable Homotopy Theory*. *Mem. Amer. Math. Soc.* **610** 1997.
- [HSS00] M. Hovey, B. Shipley i J. H. Smith, Symmetric spectra. *J. Amer. Math. Soc.* **13** (2000), no. 1, pp. 149–208.
- [Kap69] I. Kaplansky, *Infinite Abelian Groups*. The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1969.
- [Laa03] P. van der Laan, Operads —Hopf algebras and coloured Koszul duality. Ph.D. Thesis, University of Utrecht, 2003.
- [Lew91] L. G. Lewis, Is there a convenient category of spectra? *J. Pure Appl. Algebra* **73** (1991), no. 3, pp. 233–246.

- [Lim59] E. L. Lima, The Spanier-Whitehead duality in new homotopy categories. *Summa Brasil. Math.* **4** (1959), pp. 91–148.
- [Mac67] S. Mac Lane, *Homology*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, band 114. Springer-Verlag, New York, 1967.
- [Mac71] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5. Springer-Verlag, New York, 1971.
- [Mah67] M. Mahowald, The metastable homotopy of S^n . *Mem. Amer. Math. Soc.* **72** (1967).
- [Man01] M. A. Mandell, E_∞ -algebras and p -adic homotopy. *Topology* **40** (2001), pp. 43–94.
- [Mar83] H. R. Margolis, *Spectra and the Steenrod Algebra*. North-Holland Mathematical Library, vol. 29. Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1983.
- [Mar96] M. Markl, Models for operads. *Comm. Algebra* **24** (1996), pp. 1471–1500.
- [MSS02] M. Markl, S. Shnider i J. Stasheff, *Operads in Algebra, Topology and Physics*. Mathematical Surveys and Monographs, 96. American Mathematical Society, Providence, 2002.
- [May72] J. P. May, *The Geometry of Iterated Loops Spaces*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 271. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1972.
- [May97a] J. P. May, Definitions: operads, algebras and modules. *Operads: Proceedings of Renaissance Conference (Hartford, 1995)*, pp. 1–7, *Contemporary Mathematics*, vol. 202. American Mathematical Society, Providence, 1997.
- [May97b] J. P. May, Operads, algebras and modules. *Operads: Proceedings of Renaissance Conference (Hartford, 1995)*, pp. 15–31, *Contemporary Mathematics*, vol. 202. American Mathematical Society, Providence, 1997.
- [May98] J. P. May, Stable algebraic topology and stable topological algebra. *Bull. London Math. Soc.* **30** (1998), no. 3, pp. 225–234.

- [Nee01] A. Neeman, *Triangulated Categories*. Annals of Mathematics Studies, vol. 148. Princeton University Press, Princeton, 2001.
- [Pup62] D. Puppe, On the formal structure of stable homotopy theory. *Colloquium on Algebraic Topology*, pp. 65–71, Aarhus Universitet, Aarhus, 1962.
- [Qui67] D. G. Quillen, *Homotopical Algebra*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 43. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1967.
- [Qui69] D. G. Quillen, Rational homotopy theory. *Ann. of Math. (2)* **90** (1969), pp. 205–295.
- [Rav84] D. C. Ravenel, Localization with respect to certain periodic homology theories. *Amer. J. Math.* **106** (1984), no. 2, pp. 351–414.
- [Rav86] D. C. Ravenel, *Complex Cobordism and Stable Homotopy Groups of Spheres*. Pure and Applied Mathematics, vol. 121. Academic Press, Orlando, 1986.
- [Rob87] A. Robinson, The extraordinary derived category. *Math. Z.* **96** (1987), no. 2, pp. 231–238.
- [Rud98] Y. B. Rudyak, *On Thom Spectra, Orientability and Cobordism*. Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1998.
- [Sch73] P. Schultz, The endomorphism ring of the additive group of a ring. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **15** (1973), pp. 60–69.
- [Sch01] S. Schwede, S -modules and symmetric spectra. *Math. Ann.* **319** (2001), no. 3, pp. 517–532.
- [SS03] S. Schwede i B. Shipley, Stable model categories are categories of modules. *Topology* **42** (2003), no. 1, pp. 103–153.
- [Ser53] J.-P. Serre, Groupes d'homotopie et classes de groupes abliens. *Ann. of Math. (2)* **58** (1953), pp. 258–294.
- [SW53] E. H. Spanier i J. H. C. Whitehead, A first approximation to homotopy theory. *Proc. Nat. Acad. Sci.* **39** (1953), pp. 655–660.

- [Sta63] J. D. Stasheff, Homotopy associativity of H -spaces I and II. *Trans. Amer. Math. Soc.* **108** (1963), pp. 275–312.
- [Sul70] D. Sullivan, Geometric topology, Part I. Mimeographed notes, MIT, Cambridge, 1970.
- [Sul74] D. Sullivan, The genetics of homotopy theory and the Adams conjecture. *Ann. of Math.* (2) **100** (1974), pp. 1–80.
- [Swi75] R. M. Switzer, *Algebraic Topology — Homotopy and Homology*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, band 212. Springer-Verlag, New York, 1975.
- [Ver77] J. L. Verdier, *Catgories Derives*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 569. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1977.
- [Wei94] C. A. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [Whi62a] G. W. Whitehead, Generalized homology theories. *Trans. Amer. Math. Soc.* **102** (1962), pp 227–283.
- [Whi62b] G. W. Whitehead. Some aspects of stable homotopy theory, *Proc. Internat. Congress of Mathematicians*, Stockholm (1962), pp. 502–506, Institute Mittag-Leffler, Djursholm, 1963.

Índex alfabètic

- Ω -espectre, 5
- Σ -espectre, 5
- λ -successió, 27
- f -equivalència, 30, 40
- f -localització, 31, 40
- anell
 - rígid, 100
 - sòlid, 101, 102
- categoria
 - cofibrantment generada, 24
 - d'Eilenberg–Moore, 66
 - d'espectres simètrics, 12
 - de models, 22
 - pròpia, 26
 - simplicial, 25
 - dels S -mòduls, 14
 - homotòpica estable, 7, 19
 - localment presentable, 28
 - monoidal simètrica, 17
 - tancada, 18
 - triangulada, 16
- cofibració d'espectres, 8
- cofibració trivial, 23
- commuta amb la suspensió, 46
- conjunt dirigit, 28
- espectre, 4
 - f -local, 40
- n -connex, 7
- acíclic, 75
- anell, 58
 - rígid, 103
 - sòlid, 103
- connectiu, 7
- d'Eilenberg–Mac Lane, 5
 - reduït, 105
- de funcions, 10, 39
- de les esferes, 5
- de Moore, 11
- mòdul, 59
- simètric, 12
- suspensió, 5
- estructura localitzada, 21, 37
- fórmula de Künneth, 11
- fibració trivial, 23
- functor
 - cohomològic, 17
 - de f -localització, 32, 40
 - quasi-exacte, 49
 - de nul·lificació, 49
 - exacte, 17
 - idempotent, 42
 - representable, 17
 - triangulado, 17
- GEM estable, 67
- grup abelià

- Ext- J -complet, 94
- únicament p -divisible, 79
- d'exponent finit, 93
- racional, 94
- reduït, 85, 105
- localització
 - smashing*, 54, 85
 - cohomològica, 87
 - d'espectres anell, 61, 65
 - d'espectres mòdul, 61, 65
 - de GEMs estables, 71
 - en conjunts de primers, 53
 - fibra a fibra, 48
 - homològica, 74
 - homotòpica, 29
 - propietats universals, 40
 - terme d'error, 70
- mónada, 66
- objecte
 - f -local, 30
 - fortament dualitzable, 19
 - petit, 27
 - presentable, 28
- producte *smash*, 6, 9
- propietat d'elevació, 23
- quadrat aritmètic, 76
- recubridor connectiu, 40
- secció de Postnikov, 7, 50
- subcategoria localitzant, 17
- teorema de Hurewicz, 11
- torre de Postnikov, 7
- triangle exacte, 8, 15