

# Lie theorie voor natuurkundigen

G.J. Heckman  
Mathematisch Instituut KUN  
Nijmegen

Najaar 2002

## Inhoud

§1. De quaternionen.	2
§2. Compacte Lie groepen.	7
§3. Lie algebras.	14
§4. Homomorfismen en representaties.	18
§5. Het waterstofatoom.	26

Door deze syllabus loopt als een rode draad de draaiingsgroep  $SO_3(\mathbb{R})$  met zijn tweevoudige spinoverdekking  $SU_2(\mathbb{C})$ . In de eerste paragraaf wordt met behulp van quaternionen dit spinhomomorfisme expliciet gemaakt vanuit zowel algebraïsch alsook meetkundig standpunt. Vervolgens worden in §2 de irreducibele karakters van  $SU_2(\mathbb{C})$  bepaald met behulp van invariante integratie en de Schur orthogonaliteitsrelaties. Deze gereedschappen speelden ook een cruciale rol bij de bepaling van karaktertabellen van eindige groepen, zoals uiteengezet in de syllabus Groepentheorie voor natuurkundigen. Na in algemeenschap het verband tussen Lie groepen en Lie algebras en tussen representaties van beiden te hebben besproken wordt in §4 opnieuw de classificatie van irreducibele representaties van  $SU_2(\mathbb{C})$  uitgevoerd maar nu langs infinitesimale weg. Tenslotte wordt in de laatste paragraaf het spectrum van het waterstofatoom berekend volgens de methode van Pauli. Voor een rotatieinvariante hamiltoniaan is het impulsmoment  $\mathbf{L}$  steeds een behouden grootte. Echter voor de Kepler hamiltoniaan  $H$  is de zogenaamde Runge-Lenz vector  $\mathbf{K}$  ook behouden. De componenten van  $\mathbf{L}$  en  $\mathbf{K}$  samen genereren in het regime met eigenwaarde  $E < 0$  voor  $H$  een infinitesimale versie van  $SO_4(\mathbb{R})$ . Het spectrum van  $H$  heeft natuurlijke ontaarding voor deze grotere symmetriegroep  $SO_4(\mathbb{R})$ .

# 1 De quaternionen

**Definitie 1.1** Een *quaternion* is een vector van de vorm  $q = u_0 + u_1i + u_2j + u_3k$  met  $u_0, u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}$ . Een vermenigvuldiging op de verzameling  $\mathbb{H}$  van quaternionen wordt gedefinieerd door

$$\begin{aligned}i^2 = j^2 = k^2 &= -1, \\ij = -ji = k, \quad jk &= -kj = i, \quad ki = -ik = j.\end{aligned}$$

Stellen we  $\alpha = u_0 + u_1i$ ,  $\beta = u_2 + u_3i \in \mathbb{C}$  dan kunnen we het quaternion  $q = \alpha + \beta j \in \mathbb{H}$  identificeren met de matrix

$$q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

waarbij

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

**Lemma 1.2** Voor  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$  geldt

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\bar{\delta} & \bar{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma - \beta\bar{\delta} & \alpha\delta + \beta\bar{\gamma} \\ -\bar{\beta}\gamma - \bar{\alpha}\bar{\delta} & -\bar{\beta}\delta + \bar{\alpha}\bar{\gamma} \end{pmatrix}$$

en de productregel voor quaternionen volgens Definitie 1.1 stemt overeen met matrixvermenigvuldiging.

**Bewijs.** Dit is een eenvoudige berekening. □

**Gevolg 1.3** De vermenigvuldiging van quaternionen is een associatieve (maar niet commutatieve) bewerking op  $\mathbb{H}$ .

**Bewijs.** Duidelijk want matrixvermenigvuldiging is associatief. □

Zij  $q = u_0 + u_1i + u_2j + u_3k \in \mathbb{H}$  een quaternion. Het getal  $u_0 \in \mathbb{R}$  heet het *reële deel* van  $q$ , en als  $\text{Re}(q) = 0$  dan heet  $q$  een *zuiver imaginair quaternion*. Het quaternion  $\bar{q} = u_0 - u_1i - u_2j - u_3k$  heet het (aan  $q$ ) *toegevoegde quaternion*. Men gaat direct na dat

$$q\bar{q} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = \det(q)$$

en we stellen  $|q| = (q\bar{q})^{\frac{1}{2}}$  voor de norm of lengte van  $q$ . Vanwege de interpretatie als determinant volgt dat  $|q_1q_2| = |q_1||q_2|$  voor  $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$  zodat de lengteafbeelding

$$|\cdot| : \mathbb{H}^\times := \mathbb{H} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^\times$$

een multiplicatief homomorfisme is. Aangezien  $\bar{q} = q^{-1}|q|^2$  voor  $q \in \mathbb{H}^\times$  is het eenvoudig na te gaan dat  $\overline{q_1q_2} = \bar{q}_2\bar{q}_1$  voor  $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ .

**Definitie 1.4** De eenheidsbol van quaternionen

$$\{q \in \mathbb{H}; |q| = 1\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}; |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

heet de groep  $SU_2(\mathbb{C})$ .

Voor  $q \in \mathbb{H}$  geldt  $q \in SU_2(\mathbb{C})$  dan en slechts dan als  $\bar{q} = q^{-1}$ .

**Propositie 1.5** We identificeren de ruimte van zuiver imaginaire quaternionen met basis  $\{i, j, k\}$  met de lineaire ruimte  $\mathbb{R}^3$  met standaard basis. Voor  $u, v$  beide zuiver imaginaire quaternionen geldt

$$uv = -(u, v) + u \times v$$

met  $(u, v)$  het inproduct en  $u \times v$  het uitproduct van  $u$  en  $v$ .

**Bewijs.** Schrijven we  $u = u_1i + u_2j + u_3k$ ,  $v = v_1i + v_2j + v_3k$  dan is

$$uv = -(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) + (u_2v_3 - u_3v_2)i + (u_3v_1 - u_1v_3)j + (u_1v_2 - u_2v_1)k$$

hetgeen te bewijzen was. □

Definieer een afbeelding  $\pi : SU_2(\mathbb{C}) \rightarrow GL_3(\mathbb{R})$  door voor  $u \in \mathbb{R}^3$  te stellen

$$\pi(q)u = qu\bar{q} = quq^{-1}.$$

Inderdaad is voor  $u$  zuiver imaginair  $\overline{qu\bar{q}} = \overline{q\bar{u}q} = -qu\bar{q}$  dus  $qu\bar{q}$  is weer zuiver imaginair, zodat  $\pi(q) \in GL(\mathbb{R}^3)$  welgedefinieerd is. Omdat  $\pi(q_1q_2)u = q_1q_2u\overline{q_1q_2} = q_1q_2u\bar{q}_2\bar{q}_1 = \pi(q_1)\pi(q_2)u \forall q_1, q_2 \in SU_2(\mathbb{C}), \forall u \in \mathbb{R}^3$  is  $\pi$  een homomorfisme van  $SU_2(\mathbb{C})$  naar  $GL_3(\mathbb{R})$ .

**Propositie 1.6** Voor  $u, v \in \mathbb{R}^3$  en  $q \in SU_2(\mathbb{C})$  geldt

$$(\pi(q)u, \pi(q)v) = (u, v), \quad (\pi(q)u) \times (\pi(q)v) = \pi(q)(u \times v)$$

en omdat inproduct en uitproduct behouden blijven volgt  $\pi(q) \in SO_3(\mathbb{R})$ .

**Bewijs.** Het is duidelijk uit de definitie van  $\pi$  dat  $(\pi(q)u)(\pi(q)v) = \pi(q)(uv)$  en pas nu de vorige propositie toe. □

**Definitie 1.7** De afbeelding  $\pi : SU_2(\mathbb{C}) \rightarrow SO_3(\mathbb{R})$  heet het *spinhomomorfisme*.

Zij  $\{u, v, w\}$  een positief georiënteerde orthonormale basis van  $\mathbb{R}^3$ . We noteren met  $D_{w,\varphi}$  de draaiing van  $\mathbb{R}^3$  met as  $\mathbb{R}w$  over een hoek  $\varphi$ , dus met matrix

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ten opzichte van de basis  $\{u, v, w\}$ . Het is duidelijk dat  $D_{w,\varphi} = D_{-w,-\varphi}$ . De (gerichte) lijn  $\mathbb{R}w$  heet de *draaiingsas* en  $\varphi$  de *draaiingshoek* van  $D_{w,\varphi}$ .

**Stelling 1.8** Ieder element  $x \in SO_3(\mathbb{R})$  is van de vorm  $x = D_{w,\varphi}$  voor zekere  $w \in \mathbb{R}^3$  met  $(w, w) = 1$  en  $\varphi \in \mathbb{R}$ .

**Bewijs.** Laten  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  de wortels zijn van de karakteristieke vergelijking  $\det(x - \lambda) = 0$ . Omdat  $x$  een unitaire reële matrix met determinant 1 is volgt dat  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$  en (na eventuele henummering)  $\bar{\lambda}_1 = \lambda_2, \bar{\lambda}_3 = \lambda_3$  en  $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$ . Dus  $\lambda_1 = e^{i\varphi}, \lambda_2 = e^{-i\varphi}, \lambda_3 = 1$ . Kies  $w \in \mathbb{R}^3$  van lengte 1 eigenvector van  $x$  bij eigenwaarde 1. Kies  $u, v \in \mathbb{R}^3$  zodat  $\{u, v, w\}$  een positief georiënteerde orthonormale basis. Dan volgt  $x = D_{w,\varphi}$  of  $x = D_{w,-\varphi} = D_{-w,\varphi}$ .  $\square$

**Stelling 1.9** Als  $w \in \mathbb{R}^3$  met  $(w, w) = 1$  en  $\varphi \in \mathbb{R}$  zodat  $q = (\cos \frac{1}{2}\varphi + \sin \frac{1}{2}\varphi \cdot w) \in SU_2(\mathbb{C})$  dan is  $\pi(q) = D_{w,\varphi}$ .

**Bewijs.** We laten eerst zien dat  $\pi(q)w = w$ . Inderdaad

$$\begin{aligned} \pi(q)w &= (\cos \frac{1}{2}\varphi + \sin \frac{1}{2}\varphi \cdot w)w(\cos \frac{1}{2}\varphi - \sin \frac{1}{2}\varphi \cdot w) \\ &= \cos^2 \frac{1}{2}\varphi \cdot w + (\sin \frac{1}{2}\varphi \cos \frac{1}{2}\varphi - \cos \frac{1}{2}\varphi \sin \frac{1}{2}\varphi)w^2 - \sin^2 \frac{1}{2}\varphi \cdot w^3 \\ &= (\cos^2 \frac{1}{2}\varphi + \sin^2 \frac{1}{2}\varphi)w = w \end{aligned}$$

omdat  $w^2 = -1$  vanwege Propositie 1.5.

Zij nu  $\{u, v, w\}$  een positief georiënteerd orthonormaal drietal. Dan geldt

$$\begin{aligned} \pi(q)u &= (\cos \frac{1}{2}\varphi + \sin \frac{1}{2}\varphi \cdot w)u(\cos \frac{1}{2}\varphi - \sin \frac{1}{2}\varphi \cdot w) \\ &= \cos^2 \frac{1}{2}\varphi \cdot u + \sin \frac{1}{2}\varphi \cos \frac{1}{2}\varphi (wu - uw) - \sin^2 \frac{1}{2}\varphi \cdot wuw \\ &= \cos^2 \frac{1}{2}\varphi \cdot u + 2 \sin \frac{1}{2}\varphi \cos \frac{1}{2}\varphi \cdot v - \sin^2 \frac{1}{2}\varphi \cdot u \\ &= \cos \varphi \cdot u + \sin \varphi \cdot v \end{aligned}$$

met behulp van Propositie 1.5.  $\square$

**Gevolg 1.10** Het spinhomomorfisme  $\pi : SU_2(\mathbb{C}) \rightarrow SO_3(\mathbb{R})$  is surjectief met kern  $\{\pm 1\}$ , dus  $SU_2(\mathbb{C})/\{\pm 1\} \cong SO_3(\mathbb{R})$  vanwege de homomorfietelling.

**Stelling 1.11** De conjugatieklassen in  $SU_2(\mathbb{C})$  zijn de breedtesferen  $\{q \in SU_2(\mathbb{C}); \operatorname{Re}(q) = x\}$  met  $-1 \leq x \leq 1$ . Hierbij zijn  $x = 1$  de noordpool  $q = 1$  en  $x = -1$  de zuidpool  $q = -1$  beiden als punt een conjugatieklasse. De cirkelgroep

$$U_1(\mathbb{C}) = \{e^{i\varphi}; \varphi \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}; \varphi \in \mathbb{R} \right\}$$

snijdt iedere conjugatieklasse in precies 2 punten, behalve de klassen van  $\pm 1$  in precies 1 punt.

**Bewijs.** Als  $q_1, q_2 \in SU_2(\mathbb{C})$  dan is er een  $q \in SU_2(\mathbb{C})$  met  $qq_1\bar{q} = q_2$  dan en slechts dan als  $\operatorname{Re}(q_1) = \operatorname{Re}(q_2)$ . Dit volgt omdat conjugeren met  $q$  het reële deel van een quaternion (dat gelijk is aan de helft van het spoor van de bijbehorende matrix) vastlaat, en  $\pi(SU_2(\mathbb{C})) = SO_3(\mathbb{R})$  ieder tweetal vectoren in  $\mathbb{R}^3$  van gelijke lengte in elkaar overvoert.  $\square$

**Opmerking 1.12** De quaternionen zijn ingevoerd in 1843 door Hamilton, vandaar de letter  $\mathbb{H}$ .

## Opgaven

1.1. Bewijs dat de afbeelding

$$SO_2(\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \mapsto e^{i\varphi} \in U_1(\mathbb{C})$$

een isomorfisme van groepen is.

1.2. Bewijs dat

$$D_{w,\varphi}(v) = \cos \varphi \cdot v + \sin \varphi \cdot w \times v + 2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi \cdot (v, w)w$$

voor  $\varphi \in \mathbb{R}$  en  $v, w \in \mathbb{R}^3$  met  $(w, w) = 1$ .

1.3. Bepaal voor  $\varphi = \frac{\pi}{3}$  en  $w = \frac{1}{2}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$  de matrix van  $D_{w,\varphi}$  op de standaard basis van  $\mathbb{R}^3$ .

1.4. Bewijs voor  $\varphi \in \mathbb{R}$  en  $w \in \mathbb{R}^3$ ,  $|w| = 1$  en  $A \in SO_3(\mathbb{R})$  dat  $AD_{w,\varphi}A^{-1} = D_{Aw,\varphi}$ .

1.5. Bewijs dat de conjugatieklassen in  $SO_3(\mathbb{R})$  bestaan uit alle draaiingen om zekere as over een vaste hoek  $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ .

1.6. Zij  $A := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ .

1. Bewijs dat  $A$  orthogonaal is met determinant 1.

2. Bepaal een positief georiënteerd orthonormaal drietal  $\{u, v, w\}$  in  $\mathbb{R}^3$  en  $\varphi \in \mathbb{R}$  zodat  $A = D_{w,\varphi}$ .

1.7. Zij  $A := \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -\sqrt{6} \\ -1 & 3 & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Bewijs dat  $A \in SO_3(\mathbb{R})$ .

2. Bepaal de 2 elementen  $q \in SU_2(\mathbb{C})$  met  $\pi(q) = A$ .

1.8. Bewijs dat elk element van  $SO_3(\mathbb{R})$  te schrijven is in de vorm

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

met  $0 \leq \alpha, \gamma < 2\pi$ ,  $0 \leq \beta \leq \pi$ . De hoeken  $\alpha, \beta, \gamma$  heten wel de *Euler hoeken* van het betreffende element. Interpreteer deze relatie ook in  $SU_2(\mathbb{C})$ .

## 2 Compacte Lie groepen

**Definitie 2.1** Een deelverzameling  $O$  van  $\mathbb{R}^n$  heet *open* als bij elk punt  $x \in O$  er een  $\varepsilon > 0$  bestaat zodat  $B(x, \varepsilon)$  bevat is in  $O$ . Hierbij is  $B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n; |x - y| < \varepsilon\}$  de bal met middelpunt  $x$  en straal  $\varepsilon$ . Een deelverzameling  $G$  van  $\mathbb{R}^n$  heet *gesloten* als het complement  $\mathbb{R}^n - G$  open is. Een deelverzameling  $B$  van  $\mathbb{R}^n$  heet *begrensd* als er een  $R > 0$  bestaat zodat  $B$  bevat is in  $B(0, R)$ . Een deelverzameling  $K$  van  $\mathbb{R}^n$  heet *compact* als  $K$  gesloten en begrensd is.

**Lemma 2.2** Als  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  een polynoomafbeelding dan is  $\{x \in \mathbb{R}^n; p(x) = 0\}$  een gesloten deelverzameling van  $\mathbb{R}^n$ .

**Bewijs.** Bij gegeven  $R > 0$  bestaat er een  $M > 0$  zodat  $|p(x) - p(y)| \leq M \cdot |x - y|$  voor alle  $x, y \in B(0, R)$ . Dit volgt uit de middelwaardstelling en een eenvoudige afchatting van polynomen. Kies  $x \in B(0, R)$  met  $p(x) \neq 0$ . Nemen we voor  $\varepsilon$  het minimum van  $|p(x)|M^{-1}$  en  $R - |x|$  dan volgt dat  $p(y) \neq 0$  voor  $y \in B(x, \varepsilon)$ . Hiermee is bewezen dat  $\{x \in \mathbb{R}^n; p(x) \neq 0\}$  een open deelverzameling van  $\mathbb{R}^n$  is.  $\square$

**Definitie 2.3** Een (lineaire) *Lie groep*  $G$  is een gesloten ondergroep  $G$  van  $GL_n(\mathbb{R})$ .

**Voorbeeld 2.4** In onderstaande voorbeelden wordt  $G$  steeds gedefinieerd door een polynoomvergelijking zodat  $G$  vanwege bovenstaand lemma een Lie groep is:

$SL_n(\mathbb{R})$	$= \{A \in GL_n(\mathbb{R}); \det A = 1\}$	<i>speciale lineaire groep,</i>
$O_n(\mathbb{R})$	$= \{A \in GL_n(\mathbb{R}); A^t A = I_n\}$	<i>orthogonale groep,</i>
$SO_n(\mathbb{R})$	$= SL_n(\mathbb{R}) \cap O_n(\mathbb{R})$	<i>speciale orthogonale groep,</i>
$GL_n(\mathbb{C})$	$= \{A \in GL_{2n}(\mathbb{R}); AJ_{2n} = J_{2n}A \text{ met } J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}\}$	<i>algemene lineaire groep,</i>
$U_n(\mathbb{C})$	$= \{A \in GL_n(\mathbb{C}); A^* A = I_n\}$	<i>unitaire groep,</i>
$SU_n(\mathbb{C})$	$= SL_n(\mathbb{C}) \cap U_n(\mathbb{C})$	<i>speciale unitaire groep.</i>

**Definitie 2.5** Een *compacte Lie groep*  $K$  is een begrensd gesloten ondergroep van  $GL_n(\mathbb{R})$ .

**Voorbeeld 2.6** Eindige groepen zijn compacte Lie groepen, en evenzo zijn  $O_n(\mathbb{R})$ ,  $SO_n(\mathbb{R})$ ,  $U_n(\mathbb{C})$  en  $SU_n(\mathbb{C})$  compacte Lie groepen.

**Definitie 2.7** Zij  $K$  een compacte Lie groep en  $L(K)$  de lineaire ruimte van continue complexwaardige functies op  $K$ . Een *maat*  $\mu$  op  $K$  is een lineaire afbeelding

$$L(K) \ni \psi \mapsto \int_K \psi(x) d\mu(x) \in \mathbb{C}$$

die voldoet aan

$$\left| \int_K \psi(x) d\mu(x) \right| \leq M \cdot \max\{|\psi(x)|; x \in K\}$$

voor zekere constante  $M > 0$ . Als bovendien geldt

$$\int_K \psi(x) d\mu(x) > 0 \text{ als } \psi(x) \geq 0 \forall x \text{ en } \psi \not\equiv 0,$$

$$\int_K \psi(yx) d\mu(x) = \int_K \psi(xy) d\mu(x) = \int_K \psi(x) d\mu(x) \forall y,$$

dan heet  $\mu$  positief respectievelijk invariant. Een *Haar maat* op een compacte Lie groep  $K$  is een positieve invariante maat op  $K$ .

**Stelling 2.8** Iedere compacte Lie groep  $K$  heeft een Haar maat, en ieder tweetal Haar maten scheidt een positieve multiplicatieve constante. We kunnen de Haar maat  $\mu$  op  $K$  normeren door

$$\int_K d\mu(x) = 1$$

en spreken dan over de *genormeerde Haar maat*.

**Voorbeeld 2.9** Als  $K$  een eindige groep dan is

$$\int_K \psi(x) d\mu(x) = |K|^{-1} \sum_{x \in K} \psi(x)$$

de genormeerde Haar maat op  $K$ .

**Voorbeeld 2.10** Voor de cirkelgroep  $SO_2(\mathbb{R}) \cong U_1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  met variabele  $\varphi$  is

$$d\mu(e^{i\varphi}) = (2\pi)^{-1} d\varphi$$

de genormeerde Haar maat.

**Voorbeeld 2.11** We zullen nu de genormeerde Haar maat op de groep  $SU_2(\mathbb{C})$  beschrijven. We identificeren daartoe  $SU_2(\mathbb{C})$  met de eenheidsbol  $S^3$  binnen de quaternionen  $\mathbb{H}$ . De afbeelding

$$SU_2(\mathbb{C}) \times SU_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{H} \ni (x, y, q) \mapsto xq\bar{y} \in \mathbb{H}$$

is lineair (over  $\mathbb{R}$ ) in  $q$  en voldoet aan

$$|xq_1\bar{y} - xq_2\bar{y}| = |x(q_1 - q_2)\bar{y}| = |q_1 - q_2|$$

voor alle  $x, y \in SU_2(\mathbb{C})$  en  $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ . We krijgen dus een homomorfisme

$$\pi : SU_2(\mathbb{C}) \times SU_2(\mathbb{C}) \rightarrow O_4(\mathbb{R}).$$

Een maat op  $S^3$  invariant onder  $O_4(\mathbb{R})$  is dus zeker invariant onder links en rechtsvermenigvuldiging met elementen van  $SU_2(\mathbb{C})$ . De euclidische maat  $\sigma$  op de eenheidsbol  $S^3$  is invariant onder  $O_4(\mathbb{R})$ , en geeft dus een Haar maat op  $SU_2(\mathbb{C})$ .

**Definitie 2.12** Een functie  $\psi \in L(K)$  heet een *klassefunctie* als  $\psi(xy) = \psi(yx)$  voor alle  $x, y \in K$ . We noteren met  $C(K)$  de lineaire deelruimte van  $L(K)$  van klassefuncties.

**Stelling 2.13** Beschouwen we de cirkelgroep  $U_1(\mathbb{C}) = \{e^{i\varphi}; \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$  als ondergroep van  $SU_2(\mathbb{C})$  dan geeft de beperkingsafbeelding aanleiding tot een lineaire bijectie

$$C(SU_2(\mathbb{C})) \rightarrow L(U_1(\mathbb{C}))^{\text{even}}.$$

Voor  $\chi$  een klassefunctie op  $SU_2(\mathbb{C})$  geldt

$$\int_{SU_2(\mathbb{C})} \chi(x) d\sigma(x) = 2\pi \int_0^{2\pi} \chi(e^{i\varphi}) \sin^2 \varphi d\varphi$$

zodat de genormeerde Haar maat  $\mu$  op  $SU_2(\mathbb{C})$  gegeven wordt door  $2\pi^2\mu = \sigma$  met  $\sigma$  de euclidische maat op  $S^3$ .

**Bewijs.** Het eerste deel van de uitspraak is een direct gevolg van Stelling 1.11. Merk op dat de conjugatieklasse van  $e^{i\varphi}$  een bol (van dimensie 2) met straal  $\sin \varphi$  is, en dus oppervlakte  $4\pi \sin^2 \varphi$  heeft. Hierbij loopt  $\varphi$  van 0 tot  $\pi$  om elke klasse precies één keer te parametriseren. De integraal formule volgt door op te merken dat een integraal van 0 tot  $\pi$  hetzelfde is als de helft van een integraal van 0 tot  $2\pi$  mits de integrand een even functie in  $\varphi$  is.  $\square$

Met Stelling 2.8 in handen kunnen we nu een aantal resultaten voor compacte Lie groepen verkrijgen analoog aan het geval van eindige groepen. De bewijzen gaan analoog door een genormeerde som over de eindige groep te vervangen door een integratie van de genormeerde Haar maat over de compacte Lie groep.

**Stelling 2.14** Is  $\rho : K \rightarrow GL(V)$  een continue representatie van een compacte Lie groep  $K$  op  $V$  dan bestaat er invariant hermitisch inproduct  $(\cdot|\cdot)$  op  $V$ , dwz.  $(\rho(x)u|\rho(x)v) = (u|v) \forall x \in K$  en  $\forall u, v \in V$ .

**Gevolg 2.15** Een continue representatie  $\rho : K \rightarrow GL(V)$  van een compacte Lie groep  $K$  op een (eindig dimensionale) vectorruimte  $V$  is volledig reducibel, dwz.  $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$  met  $U_1, \dots, U_k$  irreducibele invariante deelruimten.

**Stelling 2.16 (Schur orthogonaliteitsrelaties)**

Zij  $\rho : K \rightarrow GL(V)$  en  $\sigma : K \rightarrow GL(W)$  beide continue irreducibele representaties van een compacte Lie groep  $K$  met karakters  $\chi_\rho$  en  $\chi_\sigma$  respectievelijk. Dan geldt

$$(\chi_\rho | \chi_\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{als } \rho \simeq \sigma \\ 0 & \text{als } \rho \not\simeq \sigma \end{cases}$$

waarbij  $(\varphi | \psi) = \int_K \varphi(x) \overline{\psi(x)} d\mu(x)$  het door de genormeerde Haar maat  $\mu$  gedefinieerd in-product op  $L(K)$ .

**Voorbeeld 2.17** Voor  $n \in \mathbb{Z}$  laat  $\rho_n : U_1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$  gedefinieerd zijn door  $\rho_n(e^{i\varphi}) = e^{in\varphi}$  met karakter  $\chi_n = \rho_n$ . Inderdaad geldt

$$(\chi_n | \chi_m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\varphi} e^{-im\varphi} d\varphi = \begin{cases} 1 & \text{als } n = m \\ 0 & \text{als } n \neq m \end{cases}$$

Aangezien volgens Fourier theorie  $\{\chi_n; n \in \mathbb{Z}\}$  een volledige Hilbert basis van  $L^2(U_1(\mathbb{C}), \mu)$  is, zijn er geen andere irreducibele karakters voor  $U_1(\mathbb{C})$  dan deze. Het karakter  $\chi$  van een eindig dimensionale continue representatie  $\pi$  van  $U_1(\mathbb{C})$  is dan ook een Fourier polynoom met natuurlijke getallen als coëfficiënten, dus van de vorm

$$\chi(e^{i\varphi}) = \sum_n a_n e^{in\varphi}$$

met  $a_n \in \mathbb{N}$  en  $a_n = 0$  voor  $|n| \geq N + 1$  voor zekere  $N \in \mathbb{N}$ .

**Stelling 2.18** De irreducibele karakters van  $SU_2(\mathbb{C})$  worden op de cirkelgroep  $U_1(\mathbb{C})$  gegeven door

$$\chi_n(e^{i\varphi}) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi}$$

voor zekere  $n \in \mathbb{N}$ .

**Bewijs.** Laat  $\chi$  een irreducibel karakter van  $SU_2(\mathbb{C})$  zijn. Zoals opgemerkt in bovenstaand voorbeeld is

$$\chi(e^{i\varphi}) = \sum_n a_n e^{in\varphi}$$

met  $a_n \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{Z}$ . Voorts is  $\chi$  een even functie in  $\varphi$  vanwege Stelling 1.11 zodat de functie

$$\psi(e^{i\varphi}) := (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})\chi(e^{i\varphi}) = \sum_n b_n e^{in\varphi}$$

voldoet aan  $b_n \in \mathbb{Z}$  en  $b_{-n} = -b_n \forall n \in \mathbb{Z}$ . Gebruikmakend van de integraalformule uit Stelling 2.13 krijgen we

$$\int_{SU_2(\mathbb{C})} |\chi(x)|^2 d\mu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\chi(e^{i\varphi})|^2 \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} |\psi(e^{i\varphi})|^2 d\varphi$$

en vanwege de Schur orthonormaliteitsrelaties voor de groepen  $SU_2(\mathbb{C})$  en  $U_1(\mathbb{C})$  volgt

$$\sum_n |b_n|^2 = 2.$$

Tezamen met  $b_n \in \mathbb{Z}$  en  $b_{-n} = -b_n$  leidt dit tot

$$\psi(e^{i\varphi}) = e^{i(n+1)\varphi} - e^{-i(n+1)\varphi}$$

voor zekere  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq -1$ . De restrictie  $n \in \mathbb{N}$  volgt uit  $\chi(1) = n + 1 \geq 1$  als dimensie van een irreducibele representatie.  $\square$

**Voorbeeld 2.19** Zij  $V_n$  de lineaire ruimte van homogene polynomen van graad  $n$  in twee veranderlijken  $X$  en  $Y$ . Definieer een continue representatie  $\rho_n$  van  $SL_2(\mathbb{C})$  op  $V_n$  door

$$\rho_n \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \text{substitutie } X \mapsto aX + cY, Y \mapsto bX + dY.$$

Men gaat eenvoudig na dat dit een representatie van  $SL_2(\mathbb{C})$  is. Via beperking tot  $SU_2(\mathbb{C})$  krijgen we een representatie  $\rho_n$  van  $SU_2(\mathbb{C})$  op  $V_n$ , waarvan het karakter op de cirkelgroep  $U_1(\mathbb{C})$  wordt gegeven door

$$\chi_n(e^{i\varphi}) = e^{in\varphi} + e^{i(n-2)\varphi} + \dots + e^{-in\varphi} = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}.$$

De representatie  $(\rho_n, V_n)$  is dus een irreducibele representatie van  $SU_2(\mathbb{C})$  vanwege de vorige stelling.

**Opmerking 2.20** In de wiskundige literatuur is het gebruikelijk de irreducibele representatie van de groep  $SU_2(\mathbb{C})$  van dimensie  $(n+1)$  te parametriseren door het *hoogste gewicht*  $n \in \mathbb{N}$ . In de natuurkundige literatuur daarentegen is het standaard de irreducibele representatie van dimensie  $2s+1$  te parametriseren met *spin*  $s \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ . Het verband tussen hoogste gewicht  $n$  en spin  $s$  is dus  $n = 2s$ .

**Opmerking 2.21** De in Stelling 2.18 gevolgde methode ter bepaling van de irreducibele karakters van  $SU_2(\mathbb{C})$  is het speciale geval van een algemene methode (afkomstig van Weyl in 1925) ter bepaling van de irreducibele karakters van een willekeurige (samenhangende) compacte Lie groep.

**Opmerking 2.22** Het bewijs van Stelling 2.8 gaat met behulp van de theorie van differentiaalvormen, en is als zodanig niet geschikt om hier uiteengezet te worden.

## Opgaven

- 2.1. Controleer dat de substitutie  $X \mapsto aX + cY$ ,  $Y \mapsto bX + dY$  een representatie  $\rho_n$  van  $SL_2(\mathbb{C})$  op  $V_n$  definieert.
- 2.2. Beschouw het homomorfisme  $\pi : SU_2(\mathbb{C}) \times SU_2(\mathbb{C}) \rightarrow O_4(\mathbb{R})$  zoals gedefinieerd in Voorbeeld 2.11 en bepaal  $\text{Ker}(\pi)$ .
- 2.3. Zij  $(\rho_n, V_n)$  de representatie van  $SU_2(\mathbb{C})$  zoals beschreven in Voorbeeld 2.19 en Opgave 2.1. Dan is  $\rho_1$  de standaardrepresentatie van  $SU_2(\mathbb{C})$  van dimensie 2.

1. Controleer met behulp van karaktertheorie dat  $\rho_1 \otimes \rho_n \cong \rho_{n-1} \oplus \rho_{n+1}$ .
2. Bewijs dat  $\rho_n(-1) = (-1)^n$  en concludeer dat  $\rho_n$  via het spinhomomorfisme afkomstig is van een irreducibele representatie van  $SO_3(\mathbb{R})$  precies dan als  $n$  even is (of in meer fysische termen heeltallige spin  $s$  heeft).
3. Bewijs voor  $n \in \mathbb{N}$  de formule

$$\sin^2(n+1)\varphi = \sin\varphi(\sin\varphi + \sin 3\varphi + \cdots + \sin(2n+1)\varphi)$$

(bijvoorbeeld met inductie naar  $n$  en door gebruik te maken van de relatie  $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)$ ).

4. Concludeer met behulp van het vorig onderdeel dat

$$\rho_n \otimes \rho_n \cong \rho_0 \oplus \rho_2 \oplus \cdots \oplus \rho_{2n}.$$

- 2.4. Beschouw de groep  $O_2(\mathbb{R}) = SO_2(\mathbb{R}) \cup tSO_2(\mathbb{R})$  met  $t$  de orthogonale spiegeling in de  $x$ -as. Identificeer  $SO_2(\mathbb{R})$  met  $U_1(\mathbb{C})$  als in Opgave 1.1.

1. Bepaal de conjugatieklassen van rotaties.
2. Bewijs dat elke twee spiegelingen met elkaar geconjugueerd zijn.
3. Bewijs dat voor  $\chi$  een klassefunctie en  $\mu$  genormeerde Haar maat geldt

$$\int_{O_2(\mathbb{R})} \chi(x) d\mu(x) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \chi(e^{i\varphi}) d\varphi + \frac{1}{2} \chi(t).$$

4. Definieer 1-dimensionale representaties  $\text{triv}$  en  $\text{det}$ , en 2-dimensionale representaties

$$\rho_n(e^{i\varphi}) = \begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}, \rho_n(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

voor  $n \in \mathbb{N}$ . Bewijs dat  $\rho_0 \simeq \text{triv} \oplus \text{det}$  en dat  $\rho_n$  irreducibel is voor  $n \geq 1$ .

5. Bewijs dat  $\{\text{triv}, \text{det}, \rho_1, \rho_2, \dots\}$  de collectie irreducibele representaties van  $O_2(\mathbb{R})$  is.
6. Bewijs dat  $\rho_1 \otimes \rho_n = \rho_{n-1} \oplus \rho_{n+1}$  voor  $n \geq 1$ .

2.5. Definieer de uitwendig product representatie

$$\rho_{n,m} : SU_2(\mathbb{C}) \times SU_2(\mathbb{C}) \rightarrow GL(V_n \otimes V_m)$$

door  $\rho_{n,m}(x, y) = \rho_n(x) \otimes \rho_m(y)$  voor  $x, y \in SU_2(\mathbb{C})$ .

1. Ga na dat  $\chi_{n,m} = \text{tr } \rho_{n,m}$  wordt geven door  $\chi_{n,m}(x, y) = \chi_n(x)\chi_m(y)$ .
2. Concludeer dat  $\rho_{n,m}$  irreducibel is.
3. Beschouw  $C_2 = \{(1, 1), (-1, -1)\}$  als ondergroep van  $SU_2(\mathbb{C}) \times SU_2(\mathbb{C})$ . Bewijs dat de representatie  $\rho_{n,m}$  afkomstig is van een representatie van  $(SU_2(\mathbb{C}) \times SU_2(\mathbb{C}))/C_2$  precies dan als  $(n - m)$  even is.

### 3 Lie algebras

**Definitie 3.1** Een *Lie algebra*  $\mathfrak{g}$  is een (eindig dimensionale) vectorruimte (over  $\mathbb{R}$  of over  $\mathbb{C}$ )  $\mathfrak{g}$ , voorzien van een bilineaire vorm  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , genaamd het *Lie haakje*, zodat

1.  $[X, Y] = -[Y, X] \forall X, Y \in \mathfrak{g}$  (antisymmetrie),
2.  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$  (*Jacobi identiteit*).

**Voorbeeld 3.2** Neem  $\mathfrak{g} = \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  en stel  $[A, B] = AB - BA$  het *commutator haakje*. Dan is  $[\cdot, \cdot]$  een bilineaire vorm op  $\mathfrak{g}$  die evident antisymmetrisch is. De Jacobi identiteit controleert men eenvoudig door uitschrijven. We noteren deze Lie algebra ook wel  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ , en spreken van de *algemene lineaire algebra*.

**Voorbeeld 3.3** Zij  $\mathfrak{g}$  een lineaire deelruimte van  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$  met  $[X, Y] \in \mathfrak{g} \forall X, Y \in \mathfrak{g}$ , dus  $\mathfrak{g}$  is gesloten ten opzichte van het commutator haakje. Dan is  $\mathfrak{g}$  zelf ook een Lie algebra. Hier zijn een paar voorbeelden van zulke Lie algebras:

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) &= \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}); \text{tr}(X) = 0\} \text{ speciale lineaire algebra} \\ \mathfrak{o}_n(\mathbb{R}) &= \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}); X^t + X = 0\} \text{ orthogonale algebra} \end{aligned}$$

Soms wordt een Lie algebra  $\mathfrak{g}$  van dimensie  $n$  gegeven door op een basis  $X_1, \dots, X_n$  het Lie haakje voor te schrijven, dus

$$[X_i, X_j] = \sum_k c_{ijk} X_k.$$

De coëfficiënten  $c_{ijk}$  heten de *structuurconstanten*.

**Voorbeeld 3.4** Laat  $e_1, e_2, e_3$  de standaardbasis van  $\mathbb{R}^3$ , en zij  $E_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de lineaire afbeelding uitproduct nemen met  $e_i$  voor  $i = 1, 2, 3$ . Dan worden de commutatierelaties

$$[E_i, E_j] = \sum_k \varepsilon_{ijk} E_k$$

met de (volledig antisymmetrische) *epsilon tensor* gegeven door

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{als } i, j, k = 1, 2, 3 \text{ of } 2, 3, 1 \text{ of } 3, 1, 2 \\ -1 & \text{als } i, j, k = 2, 1, 3 \text{ of } 1, 3, 2 \text{ of } 3, 2, 1 \\ 0 & \text{als anders} \end{cases}$$

De aldus beschreven Lie algebra via basis en structuurconstanten is de Lie algebra  $\mathfrak{o}_3(\mathbb{R})$ .

**Definitie 3.5** De *exponentiële afbeelding*  $\exp : \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  wordt gedefinieerd door de (overal convergente) reeks

$$\exp(X) = \sum_0^{\infty} X^k / k!$$

De (voor  $n = 1$  bekende) relatie

$$\exp(X)\exp(Y) = \exp(X + Y)$$

blijft alleen gelden onder de voorwaarde

$$[X, Y] = 0.$$

In het bijzonder impliceert dit dat  $\exp(X)$  inverteerbaar is met inverse  $\exp(-X)$ . Voorts is voor  $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$  de afbeelding

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(tX) \in GL_n(\mathbb{R})$$

een homomorfisme van groepen. Een dergelijk homomorfisme wordt wel een *1-parameter groep* met *infinitesimale voortbrenger*  $X$  genoemd.

**Definitie 3.6** Zij  $G < GL_n(\mathbb{R})$  een Lie groep. De *Lie algebra*  $\mathfrak{g}$  van  $G$  is de verzameling van alle vectoren  $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$  waarvoor een gladde kromme  $c : \mathbb{R} \rightarrow G$  bestaat met

$$c(t) = I_n + tX + O(t^2) \quad \text{voor } t \rightarrow 0.$$

Meetkundig betekent dit dat  $X$  gelijk is aan de raakvector  $\dot{c}(0)$  aan de kromme  $c$  op tijd  $t = 0$ .

Het volgende resultaat zullen we niet bewijzen in algemeenheid, maar in de voorbeelden wel steeds expliciet controleren.

**Stelling 3.7** Zij  $G < GL_n(\mathbb{R})$  een Lie groep met Lie algebra  $\mathfrak{g} < \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ . Voor  $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$  geldt:  $X \in \mathfrak{g} \iff \exp tX \in G \forall t \in \mathbb{R}$ .

De volgende stelling rechtvaardigt het gebruik van de term Lie algebra in Definitie 3.6.

**Stelling 3.8** De Lie algebra  $\mathfrak{g}$  van een Lie groep  $G < GL_n(\mathbb{R})$  is een lineaire deelruimte van  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$  die gesloten is ten opzichte van het commutator haakje, en dus is  $\mathfrak{g}$  ook Lie algebra in de zin van Definitie 3.1.

**Bewijs.** Stel  $X \in \mathfrak{g}$  en  $c : \mathbb{R} \rightarrow G$  met  $c(t) = I_n + tX + O(t^2)$  voor  $t \rightarrow 0$ . Voor  $\lambda \in \mathbb{R}$  is  $d(t) = c(\lambda t) = I_n + t(\lambda X) + O(t^2)$  een kromme in  $G$  door  $I_n$  en met raakvector  $\lambda X$  op tijd  $t = 0$ . Stel  $X, Y \in \mathfrak{g}$  en  $a, b : \mathbb{R} \rightarrow G$  met  $a(t) = I_n + tX + O(t^2)$ ,  $b(t) = I_n + tY + O(t^2)$  voor  $t \rightarrow 0$ . Dan is  $c(t) = I_n + t(X + Y) + O(t^2)$  een kromme in  $G$  door  $I_n$  en met raakvector  $(X + Y)$  op tijd  $t = 0$ . Dus is  $\mathfrak{g}$  een lineaire deelruimte van  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ .

Neem  $a(t) = \exp tX$ ,  $b(t) = \exp tY$  voor  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , en stel  $c(t) = a(t)b(t)a(-t)b(-t)$ ,  $d(t) = b(t)a(t)b(-t)a(-t)$  voor  $t \in \mathbb{R}$ . Stel  $e(t) = c(t^{\frac{1}{2}})$  voor  $t \geq 0$ , en  $e(t) = d((-t)^{\frac{1}{2}})$  voor  $t \leq 0$ . Dan controleert men eenvoudig dat

$$e(t) = I_n + t[X, Y] + O(t^2) \quad \text{voor } t \rightarrow 0.$$

Dus  $[X, Y] \in \mathfrak{g}$  als  $X, Y \in \mathfrak{g}$ . □

**Voorbeeld 3.9** Zij  $c : \mathbb{R} \rightarrow SL_n(\mathbb{R}) < GL_n(\mathbb{R})$  een gladde kromme met  $c(t) = I_n + tX + O(t^2)$  voor  $t \rightarrow 0$ . Dan geldt

$$\det c(t) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) c_{1,\sigma(1)}(t) \dots c_{n,\sigma(n)}(t) \equiv 1.$$

Elke term met  $\sigma \neq e$  verdwijnt van orde minstens 2 voor  $t = 0$ . Differentiëren naar  $t$  en  $t = 0$  stellen geeft dus

$$\operatorname{tr}(X) = \dot{c}_{11}(0) + \dots + \dot{c}_{nn}(0) = 0.$$

Stel omgekeerd  $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$  met  $\operatorname{tr}(X) = 0$ . Dan geldt  $\exp tX \in SL_n(\mathbb{R}) \forall t \in \mathbb{R}$  vanwege de formule

$$\det(\exp X) = e^{\operatorname{tr}(X)} \quad \forall X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}).$$

Dus de Lie algebra van de speciale lineaire groep  $SL_n(\mathbb{R})$  is de speciale lineaire algebra  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ .

**Voorbeeld 3.10** Zij  $c : \mathbb{R} \rightarrow O_n(\mathbb{R}) < GL_n(\mathbb{R})$  een gladde kromme met  $c(t) = I_n + tX + O(t^2)$  voor  $t \rightarrow 0$ . Dan geldt

$$(c(t)u, c(t)v) = (u, v) \quad \text{voor alle } u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Differentiëren in  $t = 0$  geeft voor  $X = \dot{c}(0)$  de identiteit

$$(Xu, v) + (u, Xv) = 0 \quad \text{voor alle } u, v \in \mathbb{R}^n,$$

en dus is  $X$  scheefsymmetrisch.

Stel omgekeerd  $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$  scheefsymmetrisch, en zij

$$f(t) = (\exp(tX)u, \exp(tX)v)$$

voor  $u, v \in \mathbb{R}^n$ . Dan is

$$\dot{f}(t) = (X \exp(tX)u, \exp(tX)v) + (\exp(tX)u, X \exp(tX)v) = 0$$

voor alle  $t \in \mathbb{R}$ . Dus is  $f(t) = f(0) = (u, v)$  voor alle  $t \in \mathbb{R}$  en  $u, v \in \mathbb{R}^n$ , zodat  $\exp(tX) \in O_n(\mathbb{R})$  voor alle  $t \in \mathbb{R}$ . De Lie algebra van de orthogonale groep  $O_n(\mathbb{R})$  is dus de orthogonale algebra  $\mathfrak{o}_n(\mathbb{R})$  van scheefsymmetrische matrices.

**Voorbeeld 3.11** Zij  $J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{R})$  de matrix van vermenigvuldiging met  $i$  via de identificatie van  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  met  $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$ . Dan geldt voor  $c : \mathbb{R} \rightarrow GL_{2n}(\mathbb{R})$  met  $c(t) = I_n + tX + O(t^2)$  voor  $t \rightarrow 0$  dat  $c(t) \in GL_n(\mathbb{C})$  voor alle  $t \in \mathbb{R}$  alleen dan als  $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{R}); AJ_{2n} = J_{2n}A\}$ . Omgekeerd, als  $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  dan volgt direct dat  $\exp(tX) \in GL_n(\mathbb{C})$  voor alle  $t \in \mathbb{R}$ . Dus  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  is de Lie algebra van de Lie groep  $GL_n(\mathbb{C})$ .

## Opgaven

- 3.1. Controleer dat het commutator haakje op  $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$  voldoet aan de Jacobi identiteit.
- 3.2. Bepaal de infinitesimale voortbrenger van de 1-parameter groep  $\mathbb{R} \ni \varphi \mapsto D_{w,\varphi} \in SO_3(\mathbb{R})$ .
- 3.3. Laat  $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$  en  $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ .
1. Bewijs dat  $G$  een lineaire Lie groep met Lie algebra  $\mathfrak{g}$  is.
  2. Ga na dat de exponentiële afbeelding  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  bijectief is.
- 3.4. Bewijs dat de Lie algebra van  $SU_n(\mathbb{C})$  gelijk is aan de speciale unitaire algebra  $\mathfrak{su}_n(\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}); X^* + X = 0\}$ . Ga na dat de Lie algebra van  $SU_2(\mathbb{C})$  - opgevat als eenheidsbol van quaternionen - zich laat identificeren met de Lie algebra van zuiver imaginaire quaternionen met als Lie haakje  $[u, v] = 2u \times v$ .
- 3.5. Voor  $w$  een zuiver imaginair quaternion ter lengte 1 bepaal een expliciete formule voor  $\exp(tw)$  met  $t \in \mathbb{R}$ . Concludeer dat de exponentiële afbeelding  $\exp : \mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) \rightarrow SU_2(\mathbb{C})$  surjectief is.
- 3.6. Bewijs dat  $\exp \mathfrak{o}_3(\mathbb{R}) = SO_3(\mathbb{R})$ .
- 3.7. Zij  $G < GL_n(\mathbb{R})$  een lineaire Lie groep met Lie algebra  $\mathfrak{g} < \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ . Bewijs dat

$$\exp(tX) \exp(tY) \exp(-tX) \exp(-tY) = I_n + t^2[X, Y] + O(t^3)$$

voor  $t \rightarrow 0$  en voor  $X, Y \in \mathfrak{g}$ .

- 3.8. Zij  $\mathfrak{g}$  een Lie algebra, en stel

$$\begin{aligned} \text{Aut}(\mathfrak{g}) &= \{A \in GL(\mathfrak{g}); A[X, Y] = [AX, AY] \forall X, Y \in \mathfrak{g}\} \\ \text{Der}(\mathfrak{g}) &= \{D \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}); D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY] \forall X, Y \in \mathfrak{g}\} \end{aligned}$$

Bewijs

1.  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  is een lineaire Lie groep.
2.  $\text{Der}(\mathfrak{g})$  is de Lie algebra van  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ .

## 4 Homomorfismen en representaties

Laat  $G_1 < GL_{n_1}(\mathbb{R})$  en  $G_2 < GL_{n_2}(\mathbb{R})$  beide lineaire Lie groepen zijn met Lie algebras  $\mathfrak{g}_1 < \mathfrak{gl}_{n_1}(\mathbb{R})$  en  $\mathfrak{g}_2 < \mathfrak{gl}_{n_2}(\mathbb{R})$  respectievelijk.

**Definitie 4.1** Een afbeelding  $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$  heet een *homomorfisme* (van Lie groepen) als  $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \forall a, b \in G_1$  en  $\varphi_0 \exp : \mathfrak{g}_1 \rightarrow G_2 < GL_{n_2}(\mathbb{R})$  glad is.

**Definitie 4.2** Een afbeelding  $\varphi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$  heet een *homomorfisme* (van Lie algebras) als  $\varphi$  lineair is en  $\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)] \forall X, Y \in \mathfrak{g}_1$ .

**Stelling 4.3** Als  $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$  een homomorfisme van Lie groepen is dan bestaat er een uniek homomorfisme  $\dot{\varphi} : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$  van Lie algebras zodat  $\varphi(\exp(X)) = \exp(\dot{\varphi}(X)) \forall X \in \mathfrak{g}_1$ . Het diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_1 & \xrightarrow{\dot{\varphi}} & \mathfrak{g}_2 \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G_1 & \xrightarrow{\varphi} & G_2 \end{array}$$

is dus commutatief.

**Bewijs.** Een 1-parameter ondergroep van een lineaire Lie groep  $G < GL_n(\mathbb{R})$  met Lie algebra  $\mathfrak{g} < \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$  is een homomorfisme  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$ . Elke 1-parameter ondergroep van  $G$  is van de vorm  $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(tX)$  voor zekere  $X \in \mathfrak{g}$ , en  $X$  heet de infinitesimale voortbrenger. Kies nu  $X \in \mathfrak{g}_1$ . Dan is  $\mathbb{R} \ni t \mapsto \varphi(\exp(tX)) \in G_2$  een 1-parameter ondergroep in  $G_2$ , en dus  $\varphi(\exp(tX)) = \exp(t\dot{\varphi}(X))$  voor alle  $t \in \mathbb{R}$  en voor zekere  $\dot{\varphi}(X) \in \mathfrak{g}_2$ . De meetkundige betekenis van  $\dot{\varphi}$  is de eerste orde benadering van  $\varphi$  rond het eenheidselement, en dus is  $\dot{\varphi} : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$  een lineaire afbeelding.

Als  $X, Y \in \mathfrak{g}_1$ , en  $c(t) = \exp(tX)\exp(tY)\exp(-tX)\exp(-tY)$  dan hebben we gezien in Opgave 3.7 dat

$$c(t^{\frac{1}{2}}) = I_n + t[X, Y] + O(t^{\frac{3}{2}}) \quad \text{voor } t \downarrow 0.$$

Anderzijds is  $\varphi(c(t)) = \varphi(\exp tX \exp tY \exp -tX \exp -tY) = \exp t\dot{\varphi}(X) \exp t\dot{\varphi}(Y) \exp -t\dot{\varphi}(X) \exp -t\dot{\varphi}(Y)$  zodat

$$\varphi(c(t^{\frac{1}{2}})) = I_n + t[\dot{\varphi}(X), \dot{\varphi}(Y)] + O(t^{\frac{3}{2}}) \quad \text{voor } t \downarrow 0.$$

We concluderen dus dat  $\dot{\varphi}([X, Y]) = [\dot{\varphi}(X), \dot{\varphi}(Y)]$  voor alle  $X, Y \in \mathfrak{g}_1$ . □

Uit een homomorfisme  $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$  van Lie groepen krijgen we door differentiatie in het eenheidselement een homomorfisme  $\dot{\varphi} : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$  van de bijbehorende Lie algebras. Naast  $\dot{\varphi}$  komt men ook de notatie  $d\varphi$  of  $T\varphi$  of ook domweg  $\varphi$  tegen. Het omgekeerde is niet altijd mogelijk: een homomorfisme van Lie algebras kan niet altijd geïntegreerd worden tot een homomorfisme van de bijbehorende Lie groepen, zoals blijkt uit volgend voorbeeld.

**Voorbeeld 4.4** Voor  $u \in \mathbb{R}^3$  zij  $E_u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  gedefinieerd door  $E_u(v) = u \times v$ . Men gaat eenvoudig na dat  $\mathfrak{o}_3(\mathbb{R}) = \{E_u; u \in \mathbb{R}^3\}$  met als Lie haakje

$$[E_u, E_v] = E_{u \times v} \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3.$$

We identificeren  $\mathbb{R}^3$  als gebruikelijk met de ruimte van zuiver imaginaire quaternionen. Als  $\pi : SU_2(\mathbb{C}) \rightarrow SO_3(\mathbb{R})$  het spin homomorfisme is dan geldt vanwege Stelling 1.9 dat

$$\pi(\cos t + \sin t w) = D_{w,2t}$$

met  $t \in \mathbb{R}$  en  $w \in \mathbb{R}^3$ ,  $(w, w) = 1$ . Aangezien  $\exp(tw) = \cos t + \sin t w$  en  $D_{w,\varphi} = \exp(\varphi E_w)$  krijgen we

$$\dot{\pi}(v) = 2E_v = E_{2v} \quad \forall v \in \mathbb{R}^3.$$

We zien dus dat  $\dot{\pi} : \mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{o}_3(\mathbb{R})$  een isomorfisme van Lie algebras is, en dus ook een inverse heeft. Het spin homomorfisme  $\pi$  is echter niet inverteerbaar.

**Definitie 4.5** Een *representatie* van een lineaire Lie groep  $G$  op een (eindig dimensionale) vectorruimte  $V$  is een homomorfisme  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  van lineaire Lie groepen.

**Definitie 4.6** Een *representatie* van een Lie algebra  $\mathfrak{g}$  op een vectorruimte  $V$  is een homomorfisme  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  van Lie algebras

Als speciaal geval van Stelling 4.3 krijgen we het volgende resultaat.

**Stelling 4.7** Een representatie  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  van een Lie groep  $G$  op een vectorruimte  $V$  geeft (door differentiatie in het eenheidselement) aanleiding tot een representatie  $\dot{\rho} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  van de bijbehorende Lie algebra  $\mathfrak{g}$  op  $V$ , gekarakteriseerd door  $\rho(\exp X) = \exp \dot{\rho}(X) \forall X \in \mathfrak{g}$ .

De begrippen invariante deelruimte en irreducibele representatie zijn hetzelfde als bij de representatietheorie van eindige groepen. In deze paragraaf verlangen we van homomorfismen en representaties van Lie groepen dat ze gladde afbeeldingen zijn om via differentiatie in het eenheidselement de corresponderende begrippen voor Lie algebras te verkrijgen. In §2 eisten we continuïteit in plaats van gladheid, want continue functies kunnen worden uitgemiddeld over een compacte Lie groep. Alhoewel continuïteit in het algemeen zwakker is dan gladheid blijkt toch een continue representatie automatisch een gladde representatie te zijn.

In de rest van deze paragraaf zullen we de representatietheorie van de Lie algebra  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$  behandelen. Een representatie van  $\mathfrak{s}$

$\mathfrak{frl}(\mathbb{R})$  op een complexe vectorruimte  $V$  kan worden voortgezet tot een complexe lineaire representatie van  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  op  $V$ , en via beperking krijgen we een representatie van  $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$  op  $V$ . Deze correspondentie tussen representaties van  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$  en  $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$  bewaart begrippen als invariante deelruimte en irreducibiliteit. In deze zin zijn de representatietheorie van  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$  en van  $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{o}_3(\mathbb{R})$  dus equivalent.

**Definitie/Propositie 4.8** De *Chevalley basis* van de Lie algebra  $\mathfrak{sl}_2$  wordt gedefinieerd door

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

en hiervoor gelden de commutaregels

$$[H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F, \quad [E, F] = H.$$

**Stelling 4.9** Zij  $\rho : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  een irreducibele representatie van  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$  op een complexe vectorruimte  $V$  van dimensie  $(n+1)$  voor zekere  $n \in \mathbb{N}$ , dan is er een basis  $\{v_0, \dots, v_n\}$  van  $V$  zodat

$$\begin{aligned} \rho(H)v_i &= (n - 2i)v_i \\ \rho(F)v_i &= (i + 1)v_{i+1} \\ \rho(E)v_i &= (n - i + 1)v_{i-1} \end{aligned}$$

met de conventie  $v_{-1} = v_{n+1} = 0$ .

**Bewijs.** Kies een eigenvector  $v \in V$  voor  $\rho(H)$  bij eigenwaarde (ook *welgewicht* genaamd)  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Dan is  $\rho(E)v$  (mits ongelijk nul) een vector van gewicht  $\lambda + 2$ , omdat

$$\begin{aligned} \rho(H)\rho(E)v &= \rho(E)\rho(H)v + [\rho(H), \rho(E)]v \\ &= \lambda\rho(E)v + \rho([H, E])v \\ &= (\lambda + 2)\rho(E)v. \end{aligned}$$

Evenzo is  $\rho(F)v$  een vector van gewicht  $\lambda - 2$ . Door een geschikt aantal keren  $\rho(E)$  op  $v$  toe te passen mogen we aannemen dat er vector  $v_0 \in V$  bestaat met

$$\rho(H)v_0 = \lambda v_0, \quad \rho(E)v_0 = 0.$$

Zo'n  $v_0$  heet een *hoogste gewichtsvector* van gewicht  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Definieer  $v_i \in V$  door

$$v_i = (i!)^{-1} \rho(F)^i v_0$$

zodat direct duidelijk is dat

$$\rho(F)v_i = (i + 1)v_{i+1}.$$

De relaties

$$\rho(H)v_i = (\lambda - 2i)v_i, \quad \rho(E)v_i = (n - i + 1)v_{i-1}$$

volgen met inductie naar  $i$ . We schrijven dit uit voor het geval van de tweede identiteit. Voor  $i = 0$  staat er  $\rho(E)v_0 = 0$  (want  $v_{-1} = 0$ ) hetgeen een van de twee relaties was waar  $v_0$  aan voldeed. Voor  $i \geq 0$  geldt

$$\begin{aligned} \rho(E)v_{i+1} &= (i + 1)^{-1} \rho(E)\rho(F)v_i = \\ &= (i + 1)^{-1} \rho(F)\rho(E)v_i + (i + 1)^{-1} \rho([E, F])v_i = \\ &= (i + 1)^{-1} (\nu - i + 1) \rho(F)v_{i-1} + (i + 1)^{-1} (\nu - 2i)v_i = \\ &= (i + 1)^{-1} \{(\nu - i + 1)i + (\nu - 2i)\}v_i = (\lambda - i)v_i \end{aligned}$$

hetgeen de tweede identiteit bewijst. De lineaire deelruimte  $U$  opgespannen door  $v_0, v_1, \dots$  is invariant onder  $\rho(H), \rho(E), \rho(F)$  en als zodanig is  $U$  een invariante deelruimte voor de representatie  $\rho : \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ . Vanwege de irreducibiliteit volgt  $U = V$ . Eigenvectoren bij verschillende eigenwaarden zijn lineair onafhankelijk hetgeen impliceert  $v_n \neq 0, v_{n+1} = 0$  waarbij  $n + 1$  de dimensie van  $V$  is. Vanwege de relatie

$$\rho(E)v_{n+1} = (\nu - n)v_n$$

concluderen we tenslotte  $\lambda = n$ . □

**Opmerking 4.10** De operatoren  $\rho(E)$  en  $\rho(F)$  heten *ladder operatoren* (waarbij men als treden van de ladder de eigenruimten van  $\rho(H)$  zich kan voorstellen).

Voor iedere  $n \in \mathbb{N}$  definiëren de formules van Stelling 4.9 voor  $\rho(H), \rho(E), \rho(F)$  een irreducibele representatie van  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$  van dimensie  $(n + 1)$ . Hiertoe moet men nagaan dat  $\rho(H), \rho(E), \rho(F)$  zoals gegeven op de basis  $v_0, v_1, \dots, v_n$  in Stelling 4.9 aan de commutatierregels van  $\mathfrak{sl}_2$  voldoen. Dit is een eenvoudige berekening die aan de lezer wordt overgelaten. In onderstaand voorbeeld wordt een alternatieve methode geschetst, die ook nog andere inzichten geeft.

**Voorbeeld 4.11** Zij  $V_n$  de lineaire ruimte van homogene polynomen in variabelen  $X$  en  $Y$  van graad  $n$ . Definieer operatoren  $\rho_n(H), \rho_n(E), \rho_n(F)$  op  $V_n$  door

$$\rho_n(H) = X \frac{\partial}{\partial X} - Y \frac{\partial}{\partial Y}, \quad \rho_n(E) = X \frac{\partial}{\partial Y}, \quad \rho_n(F) = Y \frac{\partial}{\partial X}.$$

Deze operatoren voldoen aan de commutatierregels van  $\mathfrak{sl}_2$  en aldus krijgen we een representatie  $\rho_n : \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \mathfrak{gl}(V_n)$ . De monomen  $X^{n-i}Y^i$  vormen een basis van eigenvectoren voor  $\rho_n(H)$  van gewicht  $(n - 2i)$  voor  $i = 0, 1, \dots, n$ . De vector  $v_0 = X^n$  is een hoogste gewichtsvector in  $V_n$  en de formules  $v_i = (i!)^{-1} \rho_n(F)^i v_0$  en  $\rho_n(F) = Y \frac{\partial}{\partial X}$  geven dan  $v_i = \binom{n}{i} X^{n-i} Y^i$  voor  $i = 0, 1, \dots, n$ . Tenslotte volgt uit  $\rho_n(E) = X \frac{\partial}{\partial Y}$  dat  $\rho_n(E)v_i = (n - i + 1)v_{i-1}$  voor  $i = 0, \dots, n$ .

Hiermee is bewezen dat de representatie  $\rho_n$  van  $\mathfrak{sl}_2$  op  $V_n$  een expliciete realisatie van de representatie zoals gevonden in Stelling 4.9.

We zullen nu het verband bespreken tussen de Lie groep representaties van  $SU_2(\mathbb{C})$  zoals gevonden in Stelling 2.18 en Voorbeeld 2.19 enerzijds en de Lie algebra representaties van  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$  of equivalent  $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$  zoals gevonden in Stelling 4.9 en Voorbeeld 4.11. Het verband wordt gegeven door Stelling 4.7 die zegt dat iedere Lie groep representatie kan worden gedifferentieerd tot een Lie algebra representatie. Omgekeerd hoeft niet iedere Lie algebra representatie geïntegreerd te kunnen worden tot een Lie groep representatie.

**Stelling 4.12** De representatie  $\rho_n$  van  $SL_2(\mathbb{R})$  op de ruimte  $V_n$  van homogene polynomen in 2 variabelen  $X$  en  $Y$  van graad  $n$  door

$$\rho_n \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \text{substitutie } X \mapsto aX + cY, Y \mapsto bX + dY$$

gaat door differentiatie over in de representatie  $\rho_n$  van  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$  op  $V_n$  met

$$\rho_n(H) = X \frac{\partial}{\partial X} - Y \frac{\partial}{\partial Y}, \rho_n(E) = X \frac{\partial}{\partial Y}, \rho_n(F) = Y \frac{\partial}{\partial X}.$$

**Bewijs.** We moeten laten zien voor  $Z \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$  dat  $\dot{\rho}_n(Z) = \rho_n(Z)$  waarbij

$$\dot{\rho}_n(Z) = \frac{d}{dt} \{ \rho_n(\exp tZ) \}_{t=0}.$$

Voor  $Z = H$  is  $\exp tH = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$  zodat

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{ \rho_n(\exp tH) X^{n-i} Y^i \}_{t=0} &= \frac{d}{dt} \{ e^{(n-2i)t} X^{n-i} Y^i \}_{t=0} \\ &= (n-2i) X^{n-i} Y^i = \rho_n(H) X^{n-i} Y^i. \end{aligned}$$

Voor  $Z = E$  is  $\exp tE = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  zodat

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{ \rho_n(\exp tE) X^{n-i} Y^i \}_{t=0} &= \frac{d}{dt} \{ X^{n-i} (tX + Y)^i \}_{t=0} \\ &= i X^{n-i+1} Y^{i-1} = \rho_n(E) X^{n-i} Y^i. \end{aligned}$$

Het geval  $Z = F$  gaat analoog aan dat van  $Z = E$ . □

**Definitie/Propositie 4.13** Een representatie  $\rho$  van een Lie algebra  $\mathfrak{g}$  op een (eindig dimensionale) Hilbert ruimte  $V$  heet *unitair* als

$$(\rho(X)u|v) + (u|\rho(X)v) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall u, v \in V.$$

Naar analogie met het groepsgeval zijn unitaire Lie algebras representaties ook weer volledig reducibel. Voorts is een Lie algebra representatie afkomstig van een unitaire Lie groep representatie ook weer unitair.

**Stelling 4.14** Als  $h, E, F$  operatoren op een vectorruimte  $V$  zijn waarvoor de gebruikelijke commutatierregels

$$[H, E] = 2E, [H, F] = -2F, [E, F] = H$$

gelden dan commuteert de *Casimir operator*

$$H^2 + 2H + 4FE$$

met  $H, E$  en  $F$ .

**Bewijs.** Dit zijn eenvoudige algebraïsche manipulaties gebruik makend van de regel

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$$

voor  $A, B, C$  operatoren op  $V$ . We krijgen

$$\begin{aligned} & [A, H^2 + 2H + 4FE] = \\ & [A, H]H + H[A, H] + 2[A, H] + 4[A, F]E + 4F[A, E] = \\ & \begin{cases} A = E : -2EH - 2HE - 4E + 4HE = 0 \\ A = F : 2FH + 2HF + 4F - 4FH = 0 \\ A = H : -8FE + 8FE = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

hetgeen de Stelling bewijst. □

**Gevolg 4.15** In een irreducibele representatie van  $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$  van dimensie  $(n + 1)$  werkt de Casimir operator als de scalar  $n(n + 2)$ .

**Bewijs.** Voor een irreducibele Lie algebra representatie werkt iedere operator die met (voortbrengers van) de Lie algebra commuteert als een scalar vanwege het Lemma van Schur, en dus rest ons deze scalar te berekenen. Op equivalentie na is er precies een irreducibele representatie van dimensie  $(n + 1)$  namelijk degene gevonden in Stelling 4.9 en de Casimir operator werkt op de hoogste gewichtsvector  $v_o$  als vermenigvuldiging met  $n^2 + 2n = n(n + 2)$ . □

**Opmerking 4.16** De *Pauli spin matrices* worden gedefinieerd door

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

en vormen een basis voor de ruimte van spoor nul hermitische  $2 \times 2$  matrices. In een unitaire van  $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$  werken de Pauli matrices als hermitische operatoren. De commutatiereregels voor de Pauli matrices zijn

$$[\sigma_i, \sigma_j] = \sum_k 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

en het verband tussen de Pauli en Chevalley basis is

$$H = \sigma_3, E = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2), F = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2).$$

## Opgaven

- 4.1. Laat  $\rho_n$  de representatie van  $\mathfrak{sl}_2$  op de ruimte  $V_n$  van homogene polynomen in 2 variabelen  $X, Y$  zoals gedefinieerd in Voorbeeld 4.11.

1. Controleer dat  $v_0 = X^n$ ,  $\rho_n(F) = Y \frac{\partial}{\partial X}$  en  $\rho_n(F)v_i = (iH)v_{i+1}$  impliceert dat  $v_i = \binom{n}{i} X^{n-i} Y^i$ .
  2. Stel  $\rho_n(E) = X \frac{\partial}{\partial Y}$ . Bewijs dat  $\rho_n(E)v_i = (n-i+1)v_{i-1}$ .
  3. Ga na dat de Casimir operator op  $V_n$  van devorm  $\varepsilon(\varepsilon+2)$  is waarbij  $\varepsilon = X \frac{\partial}{\partial X} + Y \frac{\partial}{\partial Y}$  de Euler operator op  $V_n$  is.
- 4.2.
1. Bewijs in de notatie van Stelling 4.14 en Opmerking 4.16 dat  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = H^2 + 2H + 4FE$ .
  2. Bewijs dat in een irreducibele representatie van  $\sigma_3(\mathbb{R})$  met spin  $s$  (dus van dimensie  $2s+1$ ) de operator  $E_1^2 + E_2^2 + E_3^2$  werkt als de scalar  $-s(s+1)$ . Hierbij is  $E_1, E_2, E_3$  de basis met  $[E_i, E_j] = \sum_k \varepsilon_{ijk} E_k$  zoals gekozen in Voorbeeld 3.4.
- 4.3. Bewijs dat lineaire operatoren  $A, B, C$  altijd voldoen aan  $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$ .
- 4.4. Zij  $\mathfrak{g}$  een Lie algebra, en  $\rho_1 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V_1)$ ,  $\rho_2 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V_2)$  twee representaties van  $\mathfrak{g}$ . Definieer  $\rho_1 \otimes \rho_2 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V_1 \otimes V_2)$  door

$$\rho_1 \otimes \rho_2(X) = \rho_1(X) \otimes \text{id}_{V_2} + \text{id}_{V_1} \otimes \rho_2(X)$$

waarbij  $\text{id}_{V_1}, \text{id}_{V_2}$  de identiteit op  $V_1, V_2$  is.

1. Bewijs dat  $\rho_1 \otimes \rho_2$  een representatie van  $\mathfrak{g}$  op  $V_1 \otimes V_2$  voorstelt.
  2. Bewijs dat als  $\rho_1$  en  $\rho_2$  afkomen van Lie groep representaties, de bovenstaande definitie in overeenstemming is met het tensor product van (Lie) groep representaties.
- 4.5. Zij  $\rho : \mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  een unitaire representatie van  $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$  op een Hilbert ruimte  $V$ . Voor  $n \in \mathbb{Z}$  heten de getallen

$$d_n = \dim(\text{Ker}(\rho(H) - n))$$

de gewichtsmultipliciteiten van  $(\rho, V)$ . Zij  $V = V_{n_1} \oplus \dots \oplus V_{n_k}$  een ontbinding van  $V$  in irreducibele invariante deelruimten dan heet voor  $n \in \mathbb{N}$

$$m_n = \#\{j; n_j = n\}$$

de multipliciteit waarmee de irreducibele representatie  $(\rho_n, V_n)$  voorkomt in  $(\rho, V)$ . Bewijs dat voor  $n \in \mathbb{N}$  de operator  $\rho(E)$  de gewichtsräume  $\text{Ker}(\rho(H) - n)$  surjectief afbeeldt op de gewichtsräume  $\text{Ker}(\rho(H) - n - 2)$ . Concludeer dat  $m_n = d_n - d_{n+2}$  voor alle  $n \in \mathbb{N}$ .

- 4.6. Van een unitaire representatie  $(\rho, V)$  van  $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$  is van de gewichtsmultipliciteiten gegeven dat  $d_0 = 5$ ,  $d_2 = 3$ ,  $d_4 = 1$ ,  $d_{10} = 1$ ,  $d_{12} = 0$  en  $d_n = 0$  voor  $n$  oneven. Bepaal de multipliciteiten waarmee irreducibele representaties van  $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$  voorkomen in  $(\rho, V)$ .

4.7. Laat  $V_m$  en  $V_n$  irreducibele representaties van  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$  van dimensie  $n + 1$  en  $m + 1$  respectievelijk met standaard bases  $u_0, \dots, u_m$  en  $v_0, \dots, v_n$ .

1. Bewijs dat  $u_i \otimes v_j$  een gewichtsvector van gewicht  $(m + n - 2i - 2j)$  is.
2. Bewijs dat de gewichtsmultipliciteiten in  $V_m \otimes V_n$  gegeven worden door  $d_k = \#\{(i, j) \in \mathbb{N}^2; i \leq m, j \leq n, m + n - 2i - 2j = k\}$ .
3. Bewijs dat de multipliciteiten waarmee  $V_m \otimes V_n$  ontbindt in irreducibele representaties gegeven wordt door

$$m_k = \begin{cases} 1 & \text{als } k = |m - n|, |m - n| + 2, \dots, m + n - 2, m + n \\ 0 & \text{als anders} \end{cases}$$

4.8. Bewijs dat  $V_n \otimes V_n \otimes V_n$  equivalent is met

$$V_{3n} \oplus V_{3n-2} \oplus 3V_{3n-4} \oplus \dots \oplus (n+1)V_n \oplus (n-1)V_{n-2} \oplus (n-3)V_{n-4} \oplus \dots$$

met als laatste term  $V_0$  als  $n$  even, en  $2V_1$  als  $n$  oneven.

## 5 Het waterstofatoom

Laat  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$  en  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$  de plaats en de impuls van een puntdeeltje in  $\mathbb{R}^3$  met massa  $m$ . De hamiltoniaan in het Kepler model heeft de vorm

$$h = (2m)^{-1}p^2 + cq^{-1}$$

met  $c$  een koppelingsconstante. Het geval  $c > 0$  is afstotend en  $c < 0$  is aantrekkend. We voeren in

$$\mathbf{l} = \mathbf{q} \times \mathbf{p}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{p} \times \mathbf{l} + mcq^{-1}\mathbf{q}$$

met  $\mathbf{l}$  het *impulsmoment* en  $\mathbf{k}$  de zogenaamde *Runge-Lenz vector*. Beide vectoren zijn behouden grootheden.

**Stelling 5.1** Er geldt  $\dot{\mathbf{l}} = 0$  en  $\dot{\mathbf{k}} = 0$ .

**Bewijs.** De eerste relatie is welbekend en volgt eenvoudig uit de Leibniz productregel voor differentiëren tezamen met  $m\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p}$  en  $\dot{\mathbf{p}} = cq^{-3}\mathbf{q}$ . Voor de Runge-Lenz vector krijgen we

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{k}} &= \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{l} - mcq^{-3}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{q} + mcq^{-1}\dot{\mathbf{q}} \\ &= cq^{-3}\mathbf{q} \times \mathbf{l} - cq^{-3}(\mathbf{q}, \mathbf{p})\mathbf{q} + cq^{-1}\mathbf{p} \\ &= cq^{-3}(\mathbf{q} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) - (\mathbf{q}, \mathbf{p})\mathbf{q} + (q, q)\mathbf{p}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

vanwege de formule

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathbf{c}. \quad \square$$

**Stelling 5.2** De Runge-Lenz vector  $\mathbf{k}$  voldoet aan

$$(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = 0, \quad (\mathbf{k}, \mathbf{q}) = l^2 + mcq, \quad k^2 = 2mhl^2 + m^2c^2.$$

**Bewijs.** We schrijven uit

$$\begin{aligned} (\mathbf{k}, \mathbf{l}) &= (\mathbf{p} \times \mathbf{l} + mcq^{-1}\mathbf{q}, \mathbf{l}) \\ &= mcq^{-1}(\mathbf{q}, \mathbf{q} \times \mathbf{p}) = 0 \end{aligned}$$

waarmee de eerste formule volgt. Gebruikmakend van de formule

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

vinden we

$$\begin{aligned} (\mathbf{k}, \mathbf{q}) &= (\mathbf{p} \times \mathbf{l} + mcq^{-1}\mathbf{q}, \mathbf{q}) \\ &= l^2 + mcq \end{aligned}$$

waarmee de tweede formule volgt. Tenslotte vinden we

$$\begin{aligned} k^2 &= (\mathbf{p} \times \mathbf{l}, \mathbf{p} \times \mathbf{l}) + 2mcq^{-1}(\mathbf{q}, \mathbf{p} \times \mathbf{l}) + m^2c^2 \\ &= p^2l^2 + 2mcq^{-1}l^2 + m^2c^2 \\ &= 2mhl^2 + m^2c^2 \end{aligned}$$

waarmee de derde formule is bewezen. □

**Gevolg 5.3** Schrijven we  $(\mathbf{q}, \mathbf{k}) = qk \cos \varphi$  met  $\varphi$  de hoek tussen  $\mathbf{q}$  en  $\mathbf{k}$  dan geldt

$$q = l^2(k \cos \varphi - mc)^{-1}.$$

In het attractieve geval  $c < 0$  en in het gebied  $h < 0, k > 0, l > 0$  is dit de vergelijking van een ellips in pool coördinaten. De *excentriciteit*  $e$  van deze ellips wordt gegeven door

$$e = -k/mc = (1 + 2hl^2/mc^2)^{\frac{1}{2}}.$$

In de quantum mechanica zijn de fysische grootheden hermitische operatoren op een Hilbert ruimte. Voor een quantum grootheid zullen we een hoofdletter gebruiken tegenover dezelfde kleine letter voor de bijbehorende klassieke grootheid. De plaats  $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)$  en impuls  $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$  worden operatoren die voldoen aan de Heisenberg commutatierregels

$$[Q_i, Q_j] = [P_i, P_j] = 0, [P_i, Q_j] = -i\hbar\delta_{ij}.$$

De hamiltoniaan  $H$  wordt naar analogie met het klassiek geval

$$H = (2m)^{-1}p^2 + cQ^{-1}$$

waarbij de operator  $Q^{-1}$  voldoet aan de commutatierregels

$$[\mathbf{Q}, Q^{-1}] = 0, [\mathbf{P}, Q^{-1}] = i\hbar Q^{-3}\mathbf{Q}.$$

Voor operatorwaardige vectoren  $\mathbf{A}$  en  $\mathbf{B}$  wordt het uitproduct  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$  gedefinieerd door

$$C_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} A_j B_k.$$

Omdat operatoren niet noodzakelijk commuteren behoeft  $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$  niet gelijk te zijn aan  $-\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ .

Het impulsmoment  $\mathbf{L}$  wordt gegeven door dezelfde uitdrukking als in het klassieke geval

$$\mathbf{L} = \mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -\mathbf{P} \times \mathbf{Q},$$

en men gaat eenvoudig na

$$[L_i, Q_j] = \sum_k i\hbar \varepsilon_{ijk} Q_k, [L_i, P_j] = \sum_k i\hbar \varepsilon_{ijk} P_k.$$

**Stelling 5.4** Er geldt  $[H, \mathbf{L}] = 0$ .

**Bewijs.** Dit volgt uit

$$[L_i, P^2] = \sum_{j,k,l} \varepsilon_{ijk} [Q_j P_k, P_l^2] = \sum_{j,k} 2i\hbar \varepsilon_{ijk} P_j P_k = 0$$

en

$$[L_i, Q^{-1}] = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} [Q_j P_k, Q^{-1}] = \sum_{j,k} i\hbar \varepsilon_{ijk} Q^{-3} Q_j Q_k = 0, \quad \square$$

**Lemma 5.5** Als de operatoren  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$  voldoen aan de commutatierregels

$$[D_i, A_j] = \sum_k \varepsilon_{ijk} A_k, \quad [D_i, B_j] = \sum_k \varepsilon_{ijk} B_k$$

dan voldoet het uitproduct  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$  aan dezelfde commutatierregel

$$[D_i, C_j] = \sum_k \varepsilon_{ijk} C_k.$$

**Bewijs.** We schrijven uit

$$\begin{aligned} [D_i, C_j] &= [D_i, \sum_{k,l} \varepsilon_{jkl} A_k B_l] \\ &= \sum_{k,l} \varepsilon_{jkl} ([D_i, A_k] B_l + A_k [D_i, B_l]) \\ &= \sum_{k,l,m} \varepsilon_{jkl} (\varepsilon_{ikm} A_m B_l + \varepsilon_{ilm} A_k B_m) \\ &= \sum_{k,l,m} (\varepsilon_{jkm} \varepsilon_{ikl} + \varepsilon_{jlk} \varepsilon_{ikm}) A_l B_m \\ &= \sum_{k,l,m} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} A_l B_m = \sum_k \varepsilon_{ijk} C_k. \end{aligned}$$

□

**Gevolg 5.6** Er geldt  $[L_i, L_j] = \sum_k i\hbar \varepsilon_{ijk} L_k$ .

Op een factor  $i\hbar$  na zijn dit de commutatierregels voor de standaardbasis van de Lie algebra  $\sigma_3(\mathbb{R})$  zoals beschreven in Voorbeeld 3.4. De betekenis van Stelling 5.4 is dat de hamiltoniaan  $H$  invariant is onder de draaiingsgroep  $SO_3(\mathbb{R})$ .

Bij het invoeren van de quantum versie van de Runge-Lenz vector doet zich het probleem voor dat  $\mathbf{L} \times \mathbf{P}$  ongelijk is aan  $-\mathbf{P} \times \mathbf{L}$ , terwijl op het klassieke niveau  $\mathbf{l} \times \mathbf{p}$  en  $-\mathbf{p} \times \mathbf{l}$  wel gelijk zijn. De correcte definitie voor de quantum Runge-Lenz vector  $\mathbf{K}$  blijkt te zijn

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2}(\mathbf{P} \times \mathbf{L} - \mathbf{L} \times \mathbf{P}) + mcQ^{-1}\mathbf{Q}.$$

De symmetrisatie zorgt ervoor dat  $\mathbf{K}$  een hermitische operator wordt (Opgave 5.3).

**Stelling 5.7** Er geldt  $[H, \mathbf{K}] = 0$ .

**bewijs.** We berekenen

$$\begin{aligned} [K_i, P - j] &= \frac{1}{2} \sum_{k,l} \varepsilon_{ikl} [P_k L_l + L_l P_k, P_j] + mc[Q^{-1}Q_i, P_j] \\ &= i\hbar \sum_{k,l,m} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{ljm} P_k P_m + i\hbar mc(Q^{-1}\delta_{ij} - Q^{-3}Q_i Q_j) \\ &= i\hbar \{ \sum_{k,l,m} (\delta_{ij} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kj}) P_k P_m + mc Q^{-3} (\delta_{ij} Q^2 - Q_i Q_j) \} \\ &= i\hbar \{ (\delta_{ij} P^2 - P_i P_j) + mc Q^{-3} (\delta_{ij} Q^2 - Q_i Q_j) \} \end{aligned}$$

en dus volgt

$$\begin{aligned} [K_i, P^2] &= \sum_j \{ [K_i, P_j] P_j + P_j [K_i, P_j] \} \\ &= i\hbar \sum_j \{ 2(\delta_{ij} P_j P^2 - P_i P_j^2) + mc \delta_{ij} (Q^{-1} P_j + P_j Q^{-1}) + \\ &\quad - mc (Q^{-3} Q_i Q_j P_j + P_j Q^{-3} Q_i Q_j) \} \\ &= i\hbar mc \{ (Q^{-1} P_i + P_i Q^{-1}) - (Q^{-3} Q_i E + E^* q^{-3} Q_i) \} \\ &= 2i\hbar mc Q^{-3} (Q^2 P_i - Q_i E + i\hbar Q_i) \end{aligned}$$

waarbij  $E = \Sigma Q_j P_j$  voldoet aan  $E^* = \Sigma P_j Q_j = E - 3i\hbar$  en  $[E, Q_i] = -i\hbar Q_i$ ,  $[E, Q^{-1}] = i\hbar Q^{-1}$ . Anderzijds hebben we

$$\begin{aligned} [K_i, Q^{-1}] &= \frac{1}{2}i\hbar Q^{-3} \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} (Q_j L_k + L_k Q_j) \\ &= \frac{1}{2}i\hbar Q^{-3} \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk}^2 \{Q_j (Q_i P_j - Q_j P_i) - i\hbar Q_i\} \\ &= i\hbar Q^{-3} (Q_i E - Q^2 P_i - i\hbar Q_i) \end{aligned}$$

Hiermee is de stelling bewezen. □

**Stelling 5.8** Er gelden de commutatierregels

$$[L_i, K_j] = \sum_k i\hbar \varepsilon_{ijk} K_k, \quad [K_i, K_j] = \sum_k -2i\hbar \varepsilon_{ijk} m H L_k.$$

De eerste relatie volgt direct met behulp van Lemma 5.5. De tweede relatie als ook de volgende stelling volgt door stug doorrekenen zoals in het bewijs van Stelling 5.7.

**Stelling 5.9** Er gelden de inproductregels

$$(\mathbf{L}, \mathbf{K}) = (\mathbf{K}, \mathbf{L}) = 0, \quad K^2 = 2mH(L^2 + \hbar^2) + m^2 c^2.$$

Merk op dat de eerste relatie in overeenstemming is met de bijbehorende klassieke relatie. Echter de norm van de quantum en van de klassieke Runge-Lenz vector schelen een term, die pas verdwijnt in de klassieke limiet  $\hbar \rightarrow 0$ .

Het rekenwerk om de diverse formules af te leiden zal nu worden beloond met een bijzonder elegante en conceptueel heldere methode om het energiespectrum van het waterstofatoom te beschrijven. Het commuteren van  $H$  met  $L_i$  en  $K_j$  impliceert dat de eigenruimte

$$\{\psi; H\psi = E\psi\}$$

bij eigenwaarde  $E$  invariant wordt gelaten door de operatoren  $l_i$  en  $K_j$ . Stellen we voor een vaste eigenwaarde  $E < 0$

$$\mathbf{I} = \frac{1}{\hbar}(\mathbf{L} + (-2mE)^{-\frac{1}{2}}\mathbf{K}), \quad \mathbf{J} = \frac{1}{\hbar}(\mathbf{L} - (-2mE)^{-\frac{1}{2}}\mathbf{K})$$

dan voldoen  $\mathbf{I}, \mathbf{J}$  aan de commutatierregels

$$\begin{aligned} [I_i, I_j] &= \sum_k i\hbar \varepsilon_{ijk} I_k, \quad [J_i, J_j] = \sum_k i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k \\ [I_i, J_j] &= 0 \end{aligned}$$

vanwege 5.6 en Stelling 5.8. Dit betekent dat  $\mathbf{I}$  en  $\mathbf{J}$  twee afzonderlijke met elkaar commuterende draaiingsgroepen voortbrengen. Veronderstellen we dat de operator  $H$  natuurlijke ontanding heeft met betrekking tot impulsmoment en Runge-Lenz vector dan moet

$$\{\psi; H\psi = E\psi\} = V_{2s} \otimes V_{2t}$$

voor zekere  $s, t \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ . Hierbij werken  $I_i$  en  $J_j$  op de eerste en tweede factor van  $V_{2s} \otimes V_{2t}$  respectievelijk. Aangezien

$$\begin{aligned} 2(I^2 - J^2) &= (\mathbf{I} + \mathbf{J}, \mathbf{I} - \mathbf{J}) + (\mathbf{I} - \mathbf{J}, \mathbf{I} + \mathbf{J}) \\ &= (-2mE)^{-\frac{1}{2}} \{(\mathbf{L}, \mathbf{K}) + (\mathbf{K}, \mathbf{L})\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

en vanwege de vorige paragraaf

$$\begin{aligned} I^2 &= s(s+1)\hbar^2 && \text{op de ruimte } V_{2s} \\ J^2 &= t(t+1)\hbar^2 && \text{op de ruimte } V_{2t} \end{aligned}$$

concluderen we  $s = t$  zodat

$$\{\psi; H\psi = E\psi\} = V_{2s} \otimes V_{2s}$$

voor zekere  $s \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ . Tenslotte zullen we een formule afleiden voor  $E$  als functie van  $s$ . De tweede relatie van Stelling 5.9 kan herschreven worden tot

$$L^2 + (-2mE)^{-1}K^2 + \hbar^2 = mc^2(-2E)^{-1}$$

en aangezien

$$L^2 + (-2mE)^{-1}K^2 = 4(\mathbf{I}, \mathbf{J}) = 4s(s+1)\hbar^2$$

krijgen we

$$E = E_s = \frac{-mc^2}{2(2s+1)^2\hbar^2}$$

waarbij  $s$  loopt over de verzameling  $\frac{1}{2}\mathbb{N}$ . Het energieniveau met parameter  $s \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$  is  $(2s+1)^2$ -voudig ontaard. Het is natuurlijk ontaard als representatie ruimte voor  $\mathbf{L}$  en  $\mathbf{K}$  tezamen. Echter het is toevallig ontaard voor  $\mathbf{L} = \mathbf{I} + \mathbf{J}$  alleen, en wel als (vergelijk Opgave 2.3 of Opgave 4.7)

$$V_{2s} \otimes V_{2s} = V_0 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_{4s}.$$

Het waterstofatoom is het voorbeeld bij uitstek waarbij toevallige ontaarding met betrekking tot impulsmoment alleen het gevolg is van extra symmetrie, namelijk de Runge-Lenz vector.

**Opmerking 5.10** De hier gevolgde methode voor de berekening van het energiespectrum van het waterstofatoom is afkomstig van Pauli in 1926.

## Opgaven

5.1. Voor  $0 < e < 1$  beschouw de ellips in poolcoördinaten gegeven door  $r = (e \cos \varphi + 1)^{-1}$ .

1. Bereken de lengte  $2a$  van de lange as.
2. Controleer dat de afstand tussen de twee brandpunten gelijk is aan  $2ae$ .

5.2. Voor  $\mathfrak{g}$  een Lie algebra wordt  $ad : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  gedefinieerd door

$$ad(X)Y = [X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

1. Ga na dat  $ad$  een representatie van  $\mathfrak{g}$  op  $\mathfrak{g}$  is. Deze representatie heet de *geadjungeerde representatie* van  $\mathfrak{g}$ .
2. Bewijs dat het beeld van  $ad$  bevat is in  $\text{Der}(\mathfrak{g})$  waarbij  $\text{Der}(\mathfrak{g})$  gedefinieerd is in Opgave 3.8.
3. Definieer een symmetrische bilineaire vorm  $B$  op  $\mathfrak{g}$  door

$$B(X, Y) = \text{tr}(ad(X)ad(Y)) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Bewijs dat

$$B(X, [Y, Z]) = B([X, Y], Z) \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

De vorm  $B$  heet de *Killing vorm* op  $\mathfrak{g}$ .

4. Ga na dat de in het vorig onderdeel gevonden relatie voor  $\mathfrak{g} = \sigma_3(\mathbb{R})$  specialiseert tot de identiteit

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3.$$

5.3. Bewijs dat voor hermitische operatoren  $\mathbf{A}$  en  $\mathbf{B}$  de operator  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \mathbf{A})$  weer hermitisch is.

5.4. Bewijs dat de epsilontensor voldoet aan

1.  $\sum_m \varepsilon_{ijm} \varepsilon_{mkl} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk},$
2.  $\sum_m (\varepsilon_{ijm} \varepsilon_{mkn} + \varepsilon_{jkm} \varepsilon_{min} + \varepsilon_{kim} \varepsilon_{mjn}) = 0.$

Ga na dat de tweede relatie ook volgt door de Jacobi identiteit uit te schrijven voor de elementen  $E_i, E_j, E_k$  van  $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ .