

Oefententamen Symmetrie.

Dit is het tentamen van het jaar 2008/2009. Het tentamen van dit jaar zal er anders uitzien. Dus bijt je niet stuk op enkel dit tentamen, maar maak het als een goede voorbereiding op het tentamen van dit jaar.

Zij G de ondergroep van S_8 voortgebracht door $a = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8)$ en $b = (2\ 8\ 5)(4\ 6\ 7)$.

1. Schrijf $c = b^{-1}ab$ als product van disjuncte cykels.
2. De volgende relaties gelden in G :
 $b^3 = 1, a^4 = 1, c^2 = a^2, ac = c^3a, bcb^{-1} = a, bab^{-1} = ca$.
Reken de laatste relatie na.
3. Ga na dat de commutator-ondergroep van G gelijk is aan $N = \langle a, c \rangle$.
4. Ga na dat G semi-direct product is van N en $B = \langle b \rangle$, en dus orde 24 heeft.
5. Ga na dat G op equivalentie na drie 1-dimensionale representaties heeft.

De groep G heeft zeven conjugatieklassen: $C(1), C(a), C(a^2), C(b), C(ab), C(b^2)$ en $C(a^2b^2)$. Hun cardinaliteiten bedragen respectievelijk 1, 6, 1, 4, 4, 4 en 4. Hier staat $C(x)$ voor de conjugatie klasse van het element x .

6. Er is een representatie ρ van G is met

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \rho(b) = -\frac{1+i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad \rho(c) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Ga na dat de representatie ρ irreducibel is, en dat zijn karakter op de genoemde conjugatieklassen de waarden $(2, 0, -2, -1, 1, -1, 1)$ aanneemt.

7. Zij $\sigma = S^2(\rho)$, het symmetrische kwadraat van ρ . Ga na dat σ irreducibel is.
8. Ga na dat er een surjectief homomorfisme $\phi: G \rightarrow A_4$ bestaat met $\phi(a) = (1\ 3)(2\ 4)$ en $\phi(b) = (1\ 2\ 3\ 4)$ en $\phi(c) = (1\ 2)(3\ 4)$, waarvan de kern $\langle a^2 \rangle$ is.
9. Door zijn werking op 4 punten heeft A_4 een natuurlijke 4-dimensionale representatie. Door samenstellen met ϕ heeft G die ook. Ga na dat σ equivalent is met een 3-dimensionale irreducibele deel-representatie daarvan.
10. Bepaal de karaktertabel van G . Geef een korte uitleg hoe je te werk gaat.